Sutrima

BudiUsodo

BUKU SEKOLAH ELEKTRONIK bse

Wahana MATEMATIKA

UNTUK SEKOLAH MENENGAH ATAS DAN MADRASAH ALIYAH KELAS XII

PROGRAM ILMU BAHASA

PUSAT PERBUKUAN

Departemen Pendidikan Nasional

BudiUsodo Sutrima Wahana MATEMATIKA 3 UNTUK SEKOLAH MENENGAH ATAS DAN MADRASAH ALIYAH KELAS XII PROGRAM ILMU BAHASA

Sutrima
Budi Usodo

Wahana MATEMATIKA

Untuk Sekolah Menengah Atas/ Madrasah Aliyah Kelas XII

Program Ilmu Bahasa

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

MATEMATIKA

Untuk Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah Kelas XII
Program Bahasa

Penulis : **Sutrima**
Budi Usodo

Penulis : Sutrima
Budi Usodo

Editor : Giyarti

Setting/Lay-out : Lilis Handayani

Desain Cover : Romiyanto

510.07
SUT SUTRIMA
w Wahana Matematika : untuk Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah Kelas XII / penulis, Sutrima, Budi Usodo ; editor, Giyarti . — Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2009.
x, 168 hlm, : ilus. ; 25 cm

Bibliografi : hlm. 153
Indeks
ISBN 978-979-068-854-4 (No. Jil Lengkap)
ISBN 978-979-068-857-5

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Budi Usodo III. Giyarti

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2009

Diperbanyak oleh : ...

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2009, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 9 Tahun 2009 tanggal 12 Februari 2009.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2009
Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan buku *Wahana Matematika* ini. Buku Matematika ini merupakan buku pelengkap bagi Anda yang sedang duduk di Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah (MA) kelas XII Program Bahasa selama satu tahun.

Matematika menurut sifatnya merupakan ratu dan sekaligus sebagai pelayan ilmu, maka sebagai ratu matematika mempunyai struktur yang sistematis dan logis tidak dapat dipengaruhi oleh ilmu yang lain, sedangkan sebagai pelayan Matematika menyediakan alat yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan pada ilmu-ilmu yang lain. Buku ini ditekankan pada cara berpikir sistematis dan logis, di samping menyajikan aplikasinya pada kehidupan sehari-hari. Dengan karakteristik ini diharapkan setelah mempelajari buku ini siswa-siswa dapat berpikir secara sistematis dan logis untuk mengambil kesimpulan.

Di dalam setiap awal bab buku ini disajikan tujuan yang hendak dicapai dalam mempelajari pokok bahasan yang bersangkutan dan informasi beberapa syarat yang diperlukan. Penjelasan materi disajikan secara singkat dengan menyertakan beberapa bukti dari sifat atau teorema yang dipandang perlu. Untuk mempermudahkan pemahaman konsep, disajikan juga pembahasan satu atau beberapa contoh soal. Di akhir setiap bab disajikan rangkuman, math info, dan uji kompetensi sebagai evaluasi bagi siswa di dalam memahami suatu konsep. Sebagai refleksi terhadap tingkat penguasaan konsep, setelah mengerjakan uji kompetensi siswa dapat melihat kunci jawaban untuk mengetahui tingkat penguasaan.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang membantu penerbitan buku ini. Semoga buku ini mampu memberikan motivasi belajar bagi Anda dan nilai tambah bagi para pemakainya. Kritik dan saran kepada penulis akan diterima dengan senang hati dan akan penulis perhatikan untuk perbaikan pada edisi berikutnya.

Surakarta, April 2008

Penulis

Petunjuk Penggunaan Buku

Tujuan Pembelajaran

Tujuan pembelajaran mencakup kemampuan dasar yang diharapkan Anda miliki setelah membaca materi pada bab yang bersangkutan.

Pengantar

Pada bagian awal bab dimulai dengan pengenalan masalah nyata (*contextual proplem*) dari materi yang akan dipelajari. Hal ini dimaksudkan untuk memotivasi Anda tentang pentingnya materi yang akan dipelajari.

Materi Bahasan

Meskipun matematika sendiri bersifat deduktif, namun pembelajarannya dapat menggunakan metode induktif. Oleh karena itu agar mudah Anda ikuti, materi bahasan dideskripsikan secara induktif, diawali dari kajian hal yang konkrit ke abstrak, dari sederhana ke kompleks, dan dari mudah ke sulit. Dengan metode ini Anda diharapkan dapat menemukan sendiri konsep, sifat, aturan, atau rumus dalam matematika. Meskipun masih dimungkinkan dengan bimbingan guru.

Contoh dan Pemecahan Masalah

Untuk membantu Anda memahami konsep, sifat, aturan, dan rumus yang telah dikaji dalam materi bahasan, diperlukan contoh soal pemecahan masalah. Contoh soal pemecahan masalah dalam buku ini dibedakan menjadi dua yaitu: mencari nilai suatu besaran yang tidak diketahui yang memenuhi syarat yang ditetapkan dalam soal, dan membuktikan kebenaran atau ketidakbenaran suatu pernyataan.

Soal Latihan

Sebagai evaluasi proses belajar Anda dalam menguasai materi bahasan, pada setiap akhir sub-bab diberikan latihan soal yang sajikan secara bergradasi. Latihan ini juga untuk melatih kecermatan, keakuratan dan kecepatan siswa dalam memecahkan masalah.

Soal Analisis

Soal ini bersifat masalah kontekstual yang berkaitan dengan permasalahan di dunia nyata. Hal ini bertujuan membantu Anda berpikir kritis, yang ditandai dengan keterampilan siswa memahami masalah, memilih pendekatan atau strategi pemecahan, menyelesaikan model matematika yang diperoleh, serta bagaimana menafsirkan solusi terhadap masalah semula.

Tugas Mandiri

Sesuai namanya tugas ini untuk mengevaluasi sejauh mana Anda secara mandiri dapat memecahkan masalah. Soal-soal untuk Tugas Mandiri bersifat terbuka, sehingga Anda dapat mencari jawaban atau strategi penyelesaian yang bervariasi. Tugas ini mendorong Anda untuk memperoleh informasi lebih lanjut dari berbagai sumber lain seperti internet, buku atau artikel.

Tugas Kelompok

Tugas ini diberikan dengan tujuan untuk melatih Anda berdiskusi, berkerjasama dan berkomunikasi dengan teman Anda. Tugas dapat berbentuk gagasan tertulis, dengan menggunakan narasi, tabel, dan diagram serta lisan.

Math Info

Merupakan informasi tentang matematika untuk meningkatkan cakrawala pengetahuan yang relevan dengan materi bahasan yang bersangkutan.

Rangkuman

Merupakan kumpulan konsep kunci bab yang dinyatakan dengan kalimat ringkas dan bermakna, serta memudahkan Anda untuk memahami isi bab.

Uji Kompetensi

Untuk setiap materi bahasan diakhiri dengan uji kompetensi. Uji kompetensi terdiri atas soal-soal pemecahan masalah, untuk mengevaluasi sejauh mana kompetansi siswa terhadap pemahaman konsep, penggunaan sifat, aturan dan rumus matematika dalam pemecahan masalah yang berakitan dengan materi bahasan. Selain itu soal-soal Latihan Uji Kompetensi diharapkan dapat melatih ketrampilan Anda untuk meningkatkan kemampuan dalam pemecahan masalah.

Aktivitas Proyek

Merupakan kegiatan untuk mengaktifkan serta meningkatkan kreativitas dan kemampuan motorik Anda. Sajian materi memuat tugas observasi, investigasi, eksplorasi, inkuiri atau *hands-on activity*.

Teka-teki Matematika

Teka-teki matematika bersifat *recreational mathematics* dan bertujuan menimbulkan minat Anda untuk mengkaji lebih jauh tentang matematika.

Latihan Ulangan Umum Semester

Latihan Ulangan Umum Semester terdiri atas soal-soal pemesahan masalah yang meliputi seluruh materi bahasan dalam kurun waktu satu semester atau satu tahun. Terdapat dua jenis soal yang disajikan dalam latihan ulangan umum semester ini, yaitu soal berbentuk pilihan ganda, dan soal berbentuk uraian terstruktur. Soal-soal ini dipersiapkan untuk digunakan sebagai pelatihan Anda dalam menghadapi ulangan umum semester maupun ulangan akhir tahun.

Glosarium

Merupakan kumpulan istilah penting beserta penjelasannya yang dilengkapi dengan nomor halaman kemunculan istilah dan disajikan secara alfabetis.

Indeks

Merupakan kumpulan kata penting, antara lain objek matematika, nama tokoh atau pengarang, yang diikuti dengan nomor halaman kemunculan dan disajikan secara alfabetis.

Daftar Simbol dan Notasi

$\Rightarrow$	: implikasi dibaca "jika ... maka ..."
$\Leftrightarrow$	: biimplikasi dibaca "... jika dan hanya jika ..."
$\leq$	: kurang dari atau sama dengan
$\geq$	: lebih dari atau sama dengan
$\in$	: anggota atau entri dari
∞	: tak hingga
(x_n)	: barisan bilangan real dengan suku-suku x_n
A, B, C	: nama-nama matriks
a, b, c	: entri-entri dari matriks
A^{-1}	: invers dari matriks A
A^t	: transpose matriks A
O	: matriks nol
I	: matriks identitas
$\lvert A \rvert$ atau $\det(A)$	: determinan matriks A
u_n	: suku ke-n dari suatu barisan
S_n	: jumlah n suku pertama dari barisan
b	: beda dari barisan aritmetika, $b = u_n - u_{n-1}$
r	: rasio dari barisan geometri, $r = u_n/u_{n-1}$
Σ	: notasi sigma
	: akhir bukti atau penyelesaian

Daftar Isi

BAB I

PROGRAM LINEAR

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan dapat:
1. menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear dua variabel,
2. merancang model matematika dari masalah program linear,
3. menyelesaikan model matematika dari masalah program linear dan menafsirkan solusinya.

Pengantar

Sumber: www.ilpapnt.gov.my

Gambar 1.1 Mesin dan SDM perusahaan

Jika Anda melakukan survei di perusahaan, maka akan Anda jumpai suatu persoalan yang mengharapkan keuntungan maksimum terhadap kendala-kendala bahan, mesin dan SDM yang terbatas. Di samping itu juga dijumpai persoalan meminimumkan biaya operasional atau upah buruh terhadap beberapa persyaratan-persyaratan tertentu. Persoalan ini merupakan sebuah contoh dari persoalan program linear yang akan dibahas pada bab ini.

Program linear merupakan salah satu cabang dari matematika yang banyak digunakan di bidang ekonomi. Dengan program linear dimungkinkan untuk menghitung laba yang sebanyak-banyaknya dengan menekan biaya yang sekecil-kecilnya.

Setelah mempelajari bab ini, Anda diharapkan dapat merumuskan masalah nyata ke dalam model matematika sistem pertidaksamaan linear, menyelesaikan, dan menafsirkan hasil yang diperoleh. Sebagai prasyarat untuk mempelajari bab ini, Anda harus sudah paham tentang persamaan garis yang melalui dua titik, penyelesaian persamaan linear dan sistem persamaan linear.

Untuk menunjang tujuan tersebut, di dalam bab ini berturut-turut akan dibahas sistem pertidaksamaan dua variabel dan penyelesaiannya, model matematika sebagai masalah program linear, fungsi tujuan dan kendala dari masalah program linear, menentukan nilai optimum fungsi tujuan, dan penyelesaian masalah program linear dengan garis selidik.

1.1 Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Sebelum kita membahas lebih lanjut tentang program linear, sebelumnya akan dibahas lebih dahulu penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Secara umum, sistem pertidaksamaan linear dua variabel dengan dua pertidaksamaan dinyatakan dalam bentuk:

$$ax + by + c \leq 0 \text{ (atau} \geq 0\text{)}$$
$$dx + ey + f \leq 0 \text{ (atau} \geq 0\text{)}$$

Selanjutnya yang dimaksud dengan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear di atas adalah pasangan (x,y) sedemikian sehingga kedua pertidaksamaan di atas dipenuhi, sedangkan yang dimaksud dengan daerah penyelesaian (DP) sistem pertidaksamaan linear di atas adalah himpunan titik (x,y) pada sistem koordinat yang memenuhi kedua pertidaksamaan tersebut. Sebelum kita membahas daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear di atas, perlu dipahami lebih dahulu daerah penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel. Untuk ini perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.1.1

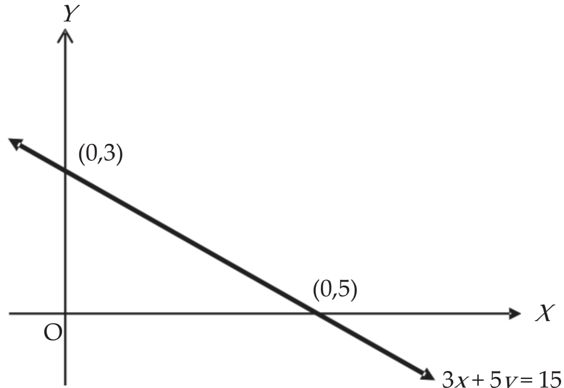
Tentukan daerah penyelesaian untuk pertidaksamaan $3x + 5y \leq 15$.

Penyelesaian:

Langkah pertama, buatlah gambar garis $3x + 5y = 15$. Untuk menggambar garis ini sebelumnya ditentukan titik-titik potong garis tersebut dengan sumbu-sumbu koordinat, untuk ini dibuat tabel sebagai berikut.

$3x + 5y = 15$		
x	0	5
y	3	0
Titik	(0,3)	(5,0)

Kemudian baru menggambar garis di atas dengan menghubungkan titik-titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat yang telah diperoleh dalam tabel. Gambarnya sebagai berikut.

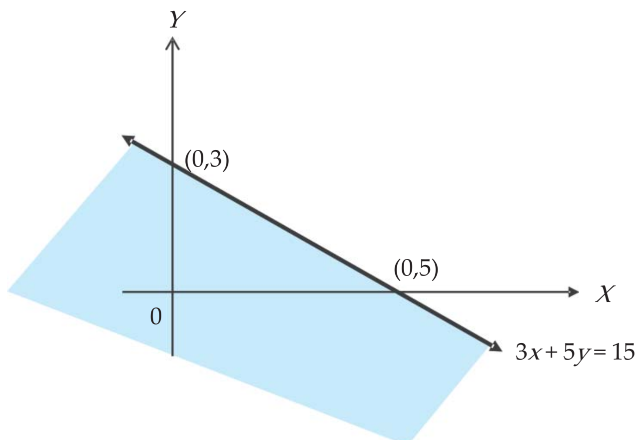


Gambar 1.2

Langkah kedua, menentukan daerah penyelesaian dari $3x + 5y \leq 15$. Untuk ini perhatikan Gambar 1.2 di atas.

Garis tersebut membagi bidang datar XOY menjadi dua bagian. Titik-titik pada garis tersebut merupakan daerah penyelesaian persamaan linear $3x + 5y = 15$. Titik titik di atas garis mungkin daerah penyelesaian pertidaksamaan linear $3x + 5y < 15$ atau daerah penyelesaian pertidaksamaan linear $3x + 5y > 15$. Untuk meyakinkan ini, diselidiki titik-titik pada daerah tersebut dihubungkan dengan pertidaksamaan yang diberikan. Biasanya diselidiki satu titik saja yang tidak pada garis $3x + 5y = 15$. Untuk memudahkan diambil titik (0,0). Untuk $x = 0$ dan $y = 0$, diperoleh $3(0) + 5(0) = 0 < 15$.

Ini berarti, titik-titik yang memenuhi pertidaksamaan linear $3x + 5y < 15$ adalah titik-titik yang terletak di bawah garis $3x + 5y < 15$, sehingga daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $3x + 5y < 15$ adalah daerah yang diarsir pada gambar berikut.



Gambar 1.3

□

Catatan:

Di dalam buku ini digunakan ketentuan bahwa daerah penyelesaiannya adalah daerah yang diarsir, yang tidak diarsir adalah daerah yang bukan penyelesaian.

Sekarang akan diberikan contoh dari daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan linear.

Contoh 1.1.2

Tentukan daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan linear berikut.

$$x + 2y \leq 10,\ x + y \leq 8,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

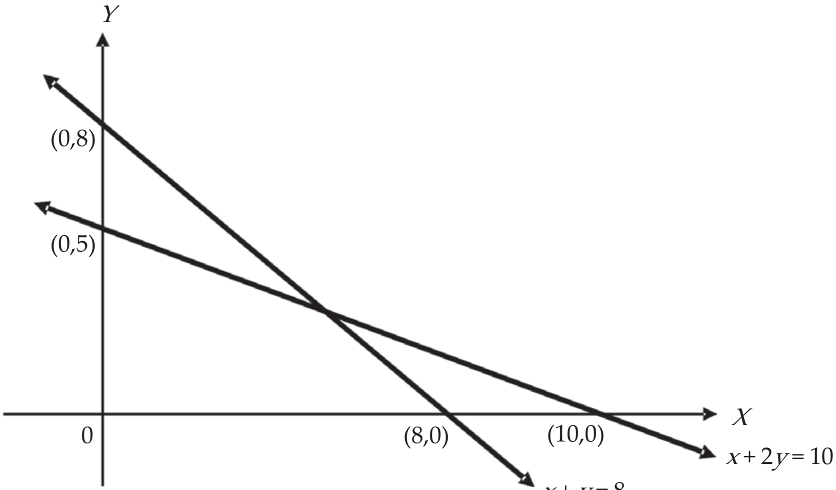
Penyelesaian:

Digambar lebih dahulu garis $x + 2y = 10$ dan garis $x + y = 8$ pada sistem koordinat Cartesius. Salah satu cara untuk menggambar garis dalam sistem koordinat Cartesius adalah dengan menentukan titik-titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat.

$x + 2y = 10$		
x	0	10
y	5	0
Titik	(0,5)	(10,0)

$x + y = 8$		
x	0	8
y	8	0
Titik	(0,8)	(8,0)

Gambar dua garis tersebut dalam sistem koordinat adalah:



Gambar 1.4

- Daerah penyelesaian dari $x + 2y \leq 10$ adalah daerah di bawah dan pada garis $x + 2y = 10$. Yang diarsir adalah daerah di bawah garis tersebut.
- Daerah penyelesaian dari $x + y \leq 8$ adalah daerah di bawah dan pada garis $x + y = 8$. Yang diarsir adalah daerah di bawah garis tersebut.
- Daerah penyelesaian dari $x \geq 0$ adalah daerah di sebelah kanan dan pada sumbu Y. Daerah yang diarsir adalah daerah di sebelah kanan sumbu Y.
- Daerah penyelesaian dari $y \geq 0$ adalah daerah di sebelah atas dan pada sumbu X. Daerah yang diarsir adalah daerah di sebelah atas sumbu X.
- Perpotongan antara garis $x + 2y = 10$ dan garis $x + y = 8$ dicari sebagai berikut.

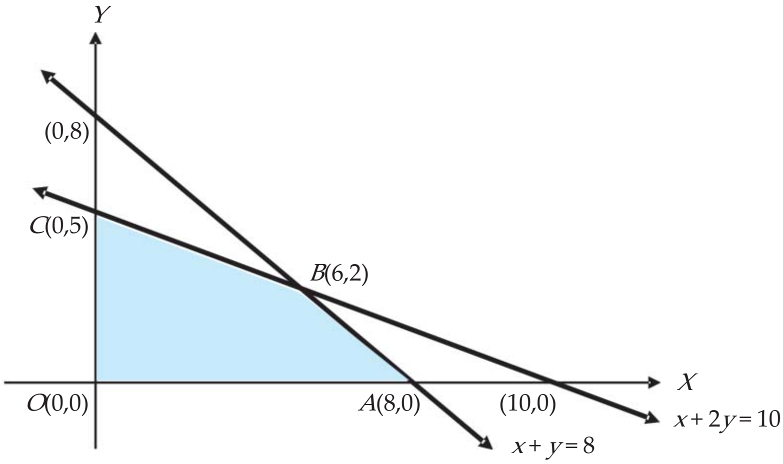
$$\begin{array}{r} x + 2y = 10 \\ x + y = 8 \\ \hline y = 2 \end{array} -$$

  Karena $x + y = 8$ dan $y = 2$, maka $x = 8 - 2 = 6$.
  Dengan demikian, titik potong kedua garis tersebut adalah titik (6,2).

Jadi, daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear:

$$x + 2y \leq 10,\ \ x + y \leq 8,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

adalah daerah $OABC$, dengan $O(0,0)$, $A(8,0)$, $B(6,2)$, dan $C(0,5)$, seperti tampak pada gambar di bawah ini.



Gambar 1.5

□

Contoh 1.1.3

Tentukan daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan linear berikut.

$$3x + 2y \leq 12, \quad 5x + 6y \leq 30, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Penyelesaian:

Titik-titik potong garis $3x + 2y = 12$ dan garis $5x + 6y = 30$ dengan sumbu-sumbu koordinat sebagai berikut.

$3x + 2y = 12$		
x	0	4
y	6	0
Titik	(0,6)	(4,0)

$5x + 6y = 30$		
x	0	6
y	5	0
Titik	(0,5)	(6,0)

Titik potong kedua garis tersebut adalah:

$$\begin{array}{llll} 3x + 2y = 12 & |\times 3| & \Rightarrow & 9x + 6y = 36 \\ 5x + 6y = 30 & |\times 1| & \Rightarrow & \underline{5x + 6y = 30} \; - \\ & & & 4x \quad = 6 \\ & & & x \quad = \dfrac{3}{2} \end{array}$$

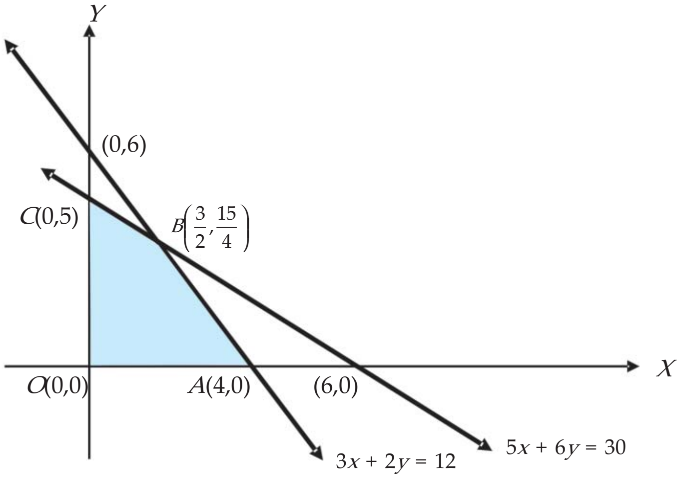
Karena $3x + 2y = 12$ dan $x = \frac{3}{2}$, maka $2y = 12 - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{24 - 9}{2} = \frac{15}{2}$ atau $y = \frac{15}{4}$.

Jadi, titik potong kedua garis tersebut adalah titik $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$.

Daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear:

$$3x + 2y \leq 12, \quad 5x + 6y \leq 30, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

adalah daerah $OABC$ dengan $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$, dan $C(0,5)$, seperti tampak pada Gambar 1.6 berikut ini.



Gambar 1.6

□

Latihan 1.1

1. Tunjukkan pada diagram Cartesius himpunan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan berikut ($x, y \in$ R) dengan mengarsir daerah yang tidak termuat di daerah penyelesaian.
   a. $x \geq 0$ c. $x \leq 0$ e. $2 \leq x \leq 5$ g. $4 \leq 2x \leq 8$
   b. $y \geq 0$ d. $y \leq 0$ f. $1 \leq y \leq 3$ h. $6 \leq 3y \leq 15$
2. Tunjukkan pada diagram Cartesius daerah penyelesaian dari masing-masing pertidaksamaan linear berikut (digambar pada sistem koordinat yang saling terpisah).
   a. $x + y \leq 5$ c. $y \geq 3$ e. $2x + 3y \leq 6$ g. $0 \leq y \leq 7$
   b. $x - y \geq 4$ d. $1 \leq x \leq 5$ f. $5x - 4y \leq 20$ h. $3x + 4y \geq 24$
3. Tunjukkan pada diagram Cartesius daerah penyelesaian dari masing-masing sistem pertidaksamaan linear berikut.
   a. $4x + 2y \leq 8, \quad x + 6y \leq 12, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$
   b. $x + 2y \leq 10, \quad 5x + 2y \leq 20, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$
   c. $3x + y \leq 15, \quad x + 3y \leq 15, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$
   d. $1 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y \leq 6, \quad x + y \leq 8$
   e. $0 \leq x \leq 8, \quad 1 \leq y \leq 5, \quad x + y \leq 6, \ x + y \geq 2$
4. Tunjukkan pada diagram Cartesius himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan:
$$1 \leq x \leq 6 \text{ dan } 1 \leq y \leq 6$$
   dengan $x, y \in B$ (himpunan semua bilangan bulat).

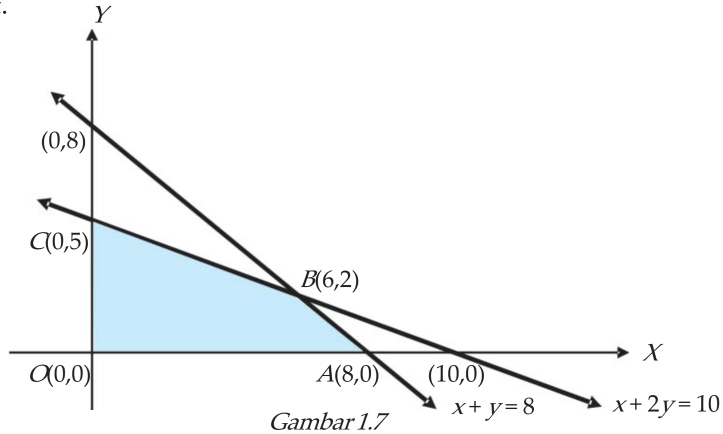
1.2 Nilai Optimum Fungsi pada Daerah Penyelesaian

Di dalam subbab ini akan ditentukan nilai optimum (nilai maksimum atau nilai minimum) suatu fungsi yang diberikan dalam suatu daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear.

Sekarang perhatikan lagi sistem pertidaksamaan linear:

$$x + 2y \leq 10, \quad x + y \leq 8, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Sistem pertidaksamaan linear ini mempunyai daerah penyelesaian seperti tampak pada gambar berikut.



Gambar 1.7

Jika pada daerah penyelesaian tersebut didefinisikan fungsi F yang dirumuskan dengan:

$$F = 3x + 4y$$

maka nilai fungsi F akan berubah-ubah bergantung pada pasangan nilai x dan y yang disubstitusikan. Di dalam kasus ini, kita akan menentukan pasangan nilai x dan y di dalam daerah penyelesaian sistem persamaan linear yang diberikan yang menyebabkan fungsi F maksimum atau minimum. Nilai minimum atau maksimum dari suatu fungsi yang diberikan terletak di ujung-ujung daerah penyelesaian, sehingga untuk menyelidiki nilai maksimum atau nilai minimum suatu fungsi yang diberikan, cukup diselidiki pada titik-titik ujung daerah penyelesaian.

Sekarang kita perhatikan nilai fungsi F pada titik-titik O(0,0), A(8,0), B(6,2), dan C(0,5), seperti tampak pada tabel berikut.

Titik	O	A	B	C
x	0	8	6	0
y	0	0	2	5
Nilai F	0	24	26	20

Dari tabel di atas, tampak bahwa:

1. Nilai F minimum adalah 0, bersesuaian dengan titik O(0,0). Ini berarti bahwa untuk $x = 0$ dan $y = 0$, F mempunyai nilai minimum nol, ditulis $F_{min} = 0$, untuk $x = 0$ dan $y = 0$.
2. Nilai F maksimum adalah 26, bersesuaian dengan titik B(6,2). Ini berarti bahwa untuk $x = 6$ dan $y = 2$, nilai fungsi F maksimum adalah 26, ditulis $F_{maks} = 26$, untuk $x = 6$ dan $y = 2$.

Contoh 1.2.1

Tunjukkan pada diagram Cartesius himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan:

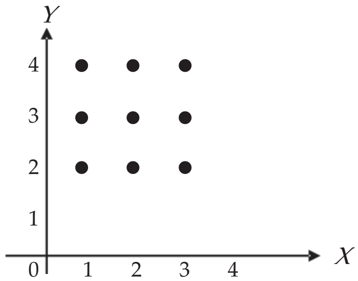
$$1 \le x \le 3 \quad \text{dan} \quad 2 \le y \le 4$$

dengan $x, y \in B$ (himpunan semua bilangan bulat), kemudian tentukan:

a. nilai $x + y$ dari masing-masing titik tersebut,
b. nilai minimum $x + y$ dari himpunan penyelesaian tersebut dan di titik manakah hal itu terjadi,

c. nilai maksimum $x + y$ dari himpunan penyelesaian tersebut dan di titik manakah hal itu terjadi,
d. di titik-titik manakah $x + y = 5$?

Penyelesaian:



a. Untuk menentukan nilai $x + y$ dibuat tabel sebagai berikut.

Titik	Nilai $x + y$
(1,2)	3
(1,3)	4
(1,4)	5
(2,2)	4
(2,3)	5
(2,4)	6
(3,2)	5
(3,3)	6
(3,4)	7

b. Nilai minimum $x + y$ pada himpunan penyelesaian tersebut adalah 3, terjadi di titik (1,2).
c. Nilai maksimum $x + y$ pada himpunan penyelesaian tersebut adalah 7, terjadi di titik (3,4).
d. Nilai $x + y = 5$ terjadi di titik-titik (1,4), (2,3), dan (3,2).

□

Contoh 1.2.2

Tentukan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear berikut.

$$x + 3y \leq 6, \quad x + y \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Kemudian, tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $F = 2x + y$ dan fungsi $G = x + 5y$ pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan tersebut.

Penyelesaian:

Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear tersebut diselesaikan sebagai berikut.

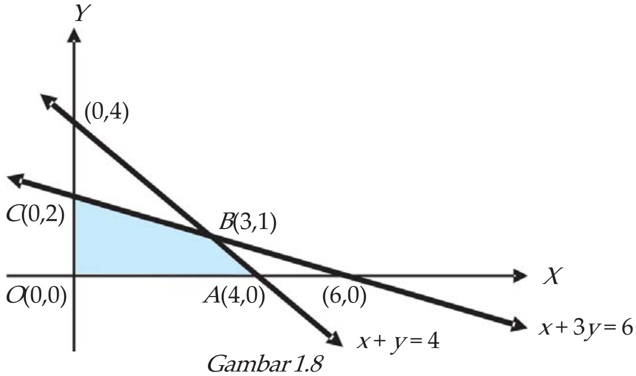
$x + 3y = 6$		
x	0	6
y	2	0
Titik	(0,2)	(6,0)

$x + y = 4$		
x	0	4
y	4	0
Titik	(0,4)	(4,0)

Titik potong kedua garis tersebut adalah:

$$\begin{array}{r} x + 3y = 6 \\ \underline{x + y = 4} \\ 2y = 2 \end{array}$$

Diperoleh $y = 1$ dan akhirnya untuk $x + y = 4 \to x + 1 = 4$ atau $x = 3$.
Jadi, titik potong kedua garis tersebut adalah (3,1).



Gambar 1.8

Daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear di atas adalah daerah *OABC*. Kemudian, nilai fungsi F dan fungsi G pada titik-titik ujung dari daerah penyelesaian *OABC*, tampak pada tabel berikut.

Titik	O	A	B	C
x	0	4	3	0
y	0	0	1	2
$F = 2x + y$	0	8	7	2
$G = x + 5y$	0	4	8	10

Dari tabel ini, diperoleh bahwa:
- Nilai maksimum dari F adalah 8, untuk $x = 4$ dan $y = 0$.
- Nilai minimum dari F adalah 0, untuk $x = 0$ dan $y = 0$.
- Nilai maksimum dari G adalah 10, untuk $x = 0$ dan $y = 2$.
- Nilai minimum dari G adalah 0, untuk $x = 0$ dan $y = 0$.

□

Latihan 1.2

1. Tunjukkan pada diagram Cartesius himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan:
$$2 \le x \le 6 \quad \text{dan} \quad 1 \le y \le 5$$
dengan $x, y \in B$ (himpunan semua bilangan bulat), kemudian tentukan:
   a. nilai $x + y$ dari masing-masing titik tersebut,
   b. nilai minimum $x + y$ dari himpunan penyelesaian tersebut dan di titik manakah hal itu terjadi,
   c. nilai maksimum $x + y$ dari himpunan penyelesaian tersebut dan di titik manakah hal itu terjadi,
   d. di titik-titik manakah $x + y = 8$?

2. Jika $F = 3x + y$ dan $G = 2x + 5y$ serta x, y adalah bilangan-bilangan bulat, tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari F dan G pada masing-masing sistem pertidaksamaan linear berikut.
   a. $2x + y \le 4,\ \ x + 6y \le 12,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0$

b. $x + 2y \le 10,\ 5x + 2y \le 20,\ x \ge 0,\ y \ge 0$
c. $3x + 5y \le 15,\ x + 3y \le 15,\ x \ge 0,\ y \ge 0$
d. $2x + y \le 30,\ x + 2y \le 48,\ x \ge 0,\ y \ge 0$
e. $2x + 3y \le 36,\ x + y \le 16,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

3. Tunjukkan pada diagram Cartesius himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $2x + y \le 8,\ x + y \le 5,\ x \ge 0,\ y \ge 0$, dengan $x, y \in B$ (himpunan bilangan bulat). Kemudian, tentukan nilai maksimum dari $3x + 4y$ dengan pembatasan-pembatasan ini. Dipenuhi untuk nilai x dan y berapa nilai maksimum $3x + 4y$?

4. Diketahui segi empat $OABC$ dengan titik-titik sudut $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(3,4)$, dan $C(0,5)$.
   a. Carilah sistem pertidaksamaan linear yang himpunan penyelesaiannya adalah daerah segi empat $OABC$.
   b. Tentukan nilai-nilai dari $3x + 2y$ di titik-titik O, A, B, dan C.
   c. Tentukan nilai maksimum dari $3x + 2y$ di titik-titik O, A, B, dan C.
   d. Tentukan nilai minimum dari $3x + 2y$ di titik-titik O, A, B, dan C.

1.3 Model Matematika Persoalan Program Linear

Di dalam kehidupan sehari-hari, salah satu keputusan manajerial yang sangat penting adalah pemanfaatan sumber-sumber yang sangat terbatas. Sumber-sumber yang dimaksud di sini dapat berupa bahan baku, peralatan dan mesin, ruang atau tempat, waktu, dana, dan orang. Semua ini dapat dipergunakan untuk menghasilkan produk tertentu.

Metode analisis yang paling baik untuk menyelesaikan permasalahan alokasi sumber-sumber yang terbatas adalah metode program linear. Pokok pikiran yang utama di dalam metode program linear adalah merumuskan masalah dengan jelas dalam model matematika dengan menggunakan sejumlah informasi yang ada. Setelah merumuskan model matematikanya, langkah berikutnya adalah menyelesaikan model matematika tersebut untuk mendapatkan jawaban terhadap masalah yang dihadapi.

Dengan kata lain, yang dimaksud dengan program linear adalah cabang dari matematika terapan yang model matematikanya berupa persamaan-persamaan atau pertidaksamaan-pertidaksamaan linear. Sedangkan yang dimaksud dengan persoalan program linear adalah suatu persoalan untuk menentukan besarnya masing-masing nilai variabel yang memaksimumkan atau meminimumkan suatu nilai fungsi tujuan, dengan memperhatikan pembatasan-pembatasan yang ada yang dinyatakan dalam bentuk persamaan-persamaan atau pertidaksamaan-pertidaksamaan linear.

Dengan pengertian di atas, berarti suatu persoalan dikatakan merupakan persoalan program linear jika memenuhi ketentuan-ketentuan berikut ini.

1. Memuat fungsi tujuan yang harus dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi linear dari variabel-variabelnya. Sebagai contoh, $f(x,y) = ax + by$. Fungsi tujuan ini harus mencerminkan tujuan persoalan yang akan dicapai.
2. Sumber-sumber yang tersedia dalam jumlah yang terbatas (biaya terbatas, bahan mentah terbatas, waktu terbatas, tenaga terbatas, dan lain-lain). Pembatasan-pembatasan tersebut harus dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan linear atau pertidaksamaan linear.
3. Harus terdapat alternatif penyelesaian atau himpunan penyelesaian yang mungkin, yaitu penyelesaian yang membuat fungsi tujuan menjadi maksimum atau minimum.

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas terhadap keterangan-keterangan di atas, berikut ini diberikan suatu contoh.

Contoh 1.3.1

Perusahaan roti "Adi Prabowo" menghasilkan dua jenis produk, yaitu produk T dan S. Masing-masing produk tersebut memerlukan dua macam bahan baku, A dan B. Harga jual setiap satuan T adalah Rp1.500,00 dan S adalah Rp1.000,00. Bahan baku A yang tersedia adalah 6.000 satuan dan B adalah 10.000 satuan. Untuk memproduksi satu satuan S diperlukan bahan baku A sebanyak satu satuan dan bahan baku B dua satuan, sedangkan untuk memproduksi satu satuan T diperlukan bahan baku A sebanyak satu satuan dan bahan baku B juga satu satuan. Masalahnya adalah bagaimana menentukan alokasi bahan baku A dan B yang terbatas untuk menghasilkan produk S dan T yang mengakibatkan perusahaan mendapatkan keuntungan semaksimum mungkin.

Untuk mendapatkan gambaran situasi produksi dan masalah yang dihadapi, lebih baik semua informasi tersebut disajikan dalam suatu tabel seperti tampak dalam tabel berikut.

Produk / Bahan	Jenis Produksi		Bahan Baku yang Tersedia
	S	T	
A	1	5	6.000
B	2	0	10.000
Harga Jual	1.500	1.000	

Langkah berikutnya, menyajikan masalah di atas dalam bentuk model matematika yang rumusannya sederhana dan mudah mencari jawabannya. Untuk keperluan ini, dimisalkan bahwa banyaknya produk jenis S adalah x dan banyaknya produk jenis T adalah y, sehingga jumlah hasil penjualan adalah $f(x,y) = 1.500x + 1.000y$. Tujuan perusahaan adalah mengusahakan $f(x,y)$ sebesar-besarnya yang berarti didapat keuntungan yang sebesar-besarnya.

Karena untuk memproduksi satu satuan S diperlukan satu satuan bahan A dan 2 satuan bahan B, maka untuk sejumlah x produk S diperlukan x satuan bahan A dan $2x$ satuan bahan B. Dengan cara yang sama untuk menghasilkan y satuan produk jenis T diperlukan y satuan bahan A dan y satuan bahan B. Dengan demikian, banyaknya bahan A yang diperlukan untuk memproduksi x satuan tipe S dan y satuan tipe T adalah $(x + y)$ satuan. Banyaknya bahan B yang diperlukan untuk memproduksi x satuan tipe S dan y satuan tipe T adalah $(2x + y)$ satuan.

Karena bahan A dan B masing-masing hanya tersedia 6.000 satuan dan 10.000 satuan, maka harus berlaku pertidaksamaan:

$$x + y \leq 6.000 \quad \text{dan} \quad 2x + y \leq 10.000$$

Di samping itu, karena x dan y masing-masing menyatakan banyaknya produk jenis S dan jenis T, maka x dan y harus bilangan nonnegatif atau harus berlaku pertidaksamaan:

$$x \geq 0 \quad \text{dan} \quad y \geq 0$$

Jika semua informasi di atas dikumpulkan, maka diperoleh model matematika yang menggambarkan masalah produksi yang sedang dihadapi perusahaan roti "Adi Prabowo", yaitu:

Tentukan nilai x dan y yang memaksimumkan fungsi:

$$f(x,y) = 1.500x + 1.000y$$

dengan batasan-batasan:

$$x + y \leq 6.000$$
$$2x + y \leq 10.000$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

□

Contoh 1.3.2

Sebuah perusahaan ingin mengirimkan hasil produksinya dengan menggunakan kotak-kotak. Untuk itu diperlukan 24 kotak ukuran sedang dan 36 kotak ukuran besar. Perusahaan ingin menyewa truk besar yang dapat memuat 6 kotak ukuran sedang dan 4 kotak ukuran besar. Di samping itu, perusahaan juga ingin menyewa truk kecil yang dapat memuat 5 kotak ukuran sedang dan 2 kotak ukuran besar. Ongkos sewa sekali jalan untuk truk besar adalah Rp750.000,00 dan untuk truk kecil adalah Rp500.000,00. Persoalan dari perusahaan adalah berapa banyaknya truk besar dan truk kecil yang harus disewa, sehingga ongkos sewa minimal dan semua produk dapat didistribusikan pada pelanggannya.

Sekarang akan ditentukan model matematika dari persoalan di atas. Pertama, dimisalkan bahwa banyaknya truk besar yang disewa adalah x dan banyaknya truk kecil yang disewa adalah y, sehingga besarnya ongkos sewa untuk dua truk tersebut adalah $f(x,y) = 750.000x + 500.000y$. Tujuan perusahaan adalah mengusahakan $f(x,y)$ minimal yang berarti pengeluaran untuk ongkos sewa adalah minimal.

Karena setiap satu truk besar dapat mengangkut 6 kotak ukuran sedang dan 4 kotak ukuran besar, maka x truk besar dapat mengangkut $6x$ kotak ukuran sedang dan $4x$ kotak ukuran besar. Selanjutnya, karena setiap satu truk kecil dapat mengangkut 5 kotak ukuran sedang dan 2 kotak ukuran besar, maka y truk kecil dapat mengangkut $5y$ kotak ukuran sedang dan $2y$ kotak ukuran besar.

Banyaknya kotak sedang adalah 24 dan banyaknya kotak besar adalah 36. Akibatnya harus berlaku pertidaksamaan linear berikut.

$$4x + 2y \geq 36 \quad \text{dan} \quad 6x + 5y \geq 24$$

Di samping itu, karena x dan y masing-masing menyatakan banyaknya truk besar dan banyaknya truk kecil, maka x dan y harus bilangan nonnegatif atau harus berlaku pertidaksamaan:

$$x \geq 0 \quad \text{dan} \quad y \geq 0$$

Jadi, model matematika dari persoalan program linear di atas adalah:
Tentukan nilai x dan y yang meminimalkan fungsi tujuan:

$$f(x,y) = 750.000x + 500.000y$$

dengan batasan-batasan:

$$\begin{gathered} 4x + 2y \geq 36 \\ 6x + 5y \geq 24 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{gathered}$$

Dari dua contoh di atas, dapat diambil kesimpulan bahwa contoh yang pertama merupakan persoalan memaksimumkan fungsi tujuan dan contoh kedua merupakan persoalan meminimumkan fungsi tujuan. Oleh karena itu, contoh pertama disebut persoalan program linear maksimisasi dan contoh kedua disebut persoalan program linear minimisasi.

Bentuk umum model matematika persoalan program linear maksimisasi dapat dinyatakan sebagai berikut.
Maksimumkan fungsi tujuan:

$$f(x,y) = ax + by$$

dengan syarat-syarat:

$$\begin{gathered} c_1 x + d_1 y \leq e_1 \\ c_2 x + d_2 y \leq e_2 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{gathered}$$

Keterangan:

Berikut ini hanya merupakan salah satu contoh keterangan untuk masalah memaksimumkan suatu fungsi tujuan di atas, beberapa kasus mempunyai keterangan yang berbeda.

1. Terdapat 2 jenis barang yang akan diproduksi, masing-masing banyaknya x dan y.
2. a dan b masing-masing menyatakan harga per satuan barang x dan y.
3. c_i dan d_i masing-masing menyatakan banyaknya bahan mentah ke-i yang digunakan untuk memproduksi barang jenis pertama dan kedua sebanyak x dan y.
4. e_i menyatakan banyaknya bahan mentah ke-i.

Bentuk umum model matematika persoalan program linear minimisasi dapat dinyatakan sebagai berikut.

Minimumkan fungsi tujuan:

$$f(x,y) = ax + by$$

dengan syarat-syarat:

$$\begin{gathered} c_1 x + d_1 y \geq e_1 \\ c_2 x + d_2 y \geq e_2 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{gathered}$$

Keterangan:

Berikut ini hanya merupakan salah satu contoh keterangan untuk masalah meminimumkan suatu fungsi tujuan di atas, beberapa kasus mempunyai keterangan yang berbeda.

1. Terdapat 2 jenis barang yang akan diproduksi, masing-masing banyaknya x dan y.
2. a dan b masing-masing menyatakan besarnya ongkos per satuan barang x dan y.
3. c_i dan d_i masing-masing menyatakan banyaknya tenaga ke-i yang digunakan untuk memproduksi barang jenis pertama dan kedua sebanyak x dan y.
4. e_i menyatakan jumlah biaya ke-i yang dikeluarkan.

Latihan 1.3

1. Sebuah perusahaan memproduksi dua jenis barang, yaitu jenis P dan Q. Untuk memproduksi dua jenis barang tersebut diperlukan tiga bahan mentah, yaitu bahan mentah A, B, dan C. Satu satuan barang P memerlukan bahan mentah A, B, dan C masing-masing 3, 2, dan 4 satuan. Sedangkan satu satuan barang Q memerlukan bahan mentah A, B, dan C masing-masing 2, 5, dan 6 satuan. Banyaknya bahan mentah A, B, dan C masing-masing tersedia 120 satuan, 150 satuan, dan 240 satuan. Jika harga jual per satuan masing-masing produk P dan Q adalah Rp10.000,00 dan Rp8.000,00, tentukan banyaknya produksi barang P dan Q agar diperoleh hasil penjualan yang sebesar-besarnya dengan banyaknya bahan mentah yang dipergunakan tidak melebihi persediaan yang tersedia. Buatlah model matematika untuk persoalan program linear ini.

2. Sebuah perusahaan makanan kecil ingin memproduksi 2 jenis makanan kecil, yaitu jenis *A* dan *B*. Untuk membuat 2 jenis makanan kecil tersebut diperlukan bahan mentah berupa tepung, telur, gula, dan mentega yang masing-masing tersedia 40 kg, 20 kg, 30 kg, dan 25 kg. Untuk setiap 1 satuan makanan kecil jenis *A* memerlukan 2 kg tepung, 3 kg telur, 2 kg gula, dan 3 kg mentega. Sedangkan untuk setiap 1 satuan makanan kecil jenis *B* memerlukan 5 kg tepung, 2 kg telur, 3 kg gula, dan 2 kg mentega. Keuntungan setiap satu satuan makanan kecil jenis *A* adalah Rp10.000,00 dan untuk makanan jenis *B* adalah Rp7.500,00. Berapa banyaknya produksi masing-masing makanan kecil tersebut agar diperoleh keuntungan yang maksimal? Buatlah model matematikanya.
3. Seorang peternak ayam ingin mempertahankan kondisi ayamnya tetap sehat. Agar tetap sehat, setiap ayam harus diberi makanan yang mengandung paling sedikit 36, 24, dan 40 satuan unsur nutrisi jenis *A, B,* dan *C* setiap harinya. Untuk keperluan tersebut, terdapat dua jenis makanan yaitu jenis *P* dan *Q*. Satu kg jenis makanan *P* mengandung nutrisi jenis *A, B,* dan *C* masing-masing sebesar 3, 1, dan 2 satuan. Sedangkan satu kg jenis makanan *Q* mengandung unsur nutrisi jenis *A, B,* dan *C* masing-masing sebesar 2, 1, dan 2 satuan. Harga satu kg makanan jenis *P* dan *Q* masing-masing adalah Rp8.000,00 dan Rp6.000,00. Peternak tersebut harus memutuskan membeli satu jenis makanan saja atau dua jenis makanan tersebut, kemudian mencampurnya agar peternak tersebut mengeluarkan uang sedikit mungkin, tetapi ayamnya tetap sehat. Buatlah model matematika dari persoalan ini.
4. Seseorang mempunyai tanah seluas 420 m^2 di daerah perkotaan. Berhubung di daerah tersebut telah dipenuhi pertokoan, orang tersebut tidak lagi mendirikan toko pada tanahnya dan dia melihat bahwa di daerah tersebut tidak ada lagi lahan untuk parkir mobil. Oleh sebab itu, dia ingin membuat tempat parkir untuk mobil sedan dan bus. Luas rata-rata untuk sebuah mobil sedan adalah 6 m^2, sedangkan untuk sebuah bus adalah 20 m^2. Tempat parkir tersebut tidak dapat memuat lebih dari 70 mobil. Tarif parkir untuk sebuah mobil sedan adalah Rp5.000,00 dan bus Rp10.000,00. Berapakah masing-masing mobil tersebut dapat parkir, agar diperoleh penghasilan yang maksimal? Buatlah model matematika untuk persoalan ini.
5. Suatu kapal laut mempunyai tempat duduk tidak lebih dari 500 orang. Setiap penumpang kelas eksekutif boleh membawa barang paling banyak 60 kg, sedang untuk kelas ekonomi boleh membawa barang sebanyak 40 kg. Kapal tersebut hanya dapat membawa barang tidak lebih dari 18. 000 kg. Bila tiket untuk setiap penumpang kelas eksekutif Rp400.000,00 dan kelas ekonomi Rp200.000,00, berapa banyaknya penumpang masing-masing kelas agar diperoleh pendapatan sebanyak-banyaknya? Buatlah model matematika untuk persoalan ini.

1.4 Penyelesaian Persoalan Program Linear

Telah disebutkan di dalam subbab sebelumnya bahwa terdapat dua macam persoalan program linear, yaitu persoalan maksimisasi dan persoalan minimisasi. Cara sederhana untuk menyelesaikan persoalan program linear adalah:

1. Mengubah persoalan program linear tersebut ke dalam model matematika dengan menentukan fungsi tujuan yang berupa fungsi linear dan syarat-syarat batasannya yang berupa sistem pertidaksamaan linear atau persamaan linear.
2. Menentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linearnya.
3. Mencari nilai maksimum atau nilai minimum dari fungsi tujuan yang diberikan pada daerah penyelesaian.
4. Menjawab persoalannya, yaitu mengembalikan penyelesaian model matematika ke penyelesaian persoalan program linearnya.

Catatan:
Jika suatu persoalan program linear telah dinyatakan dalam bentuk model matematika, maka kita hanya tinggal mengerjakan langkah 2 dan langkah 3 dari empat langkah di atas.

Berikut ini diberikan dua contoh penyelesaian persoalan program linear, contoh pertama merupakan persoalan program linear maksimisasi, sedangkan contoh kedua merupakan persoalan program linear minimisasi.

Contoh 1.4.1

Seorang penjahit ingin membuat 2 jenis pakaian yaitu jenis A dan jenis B, masing-masing memerlukan dua bahan kain yaitu bahan I dan bahan II. Untuk pakaian jenis A memerlukan kain bahan I sebanyak 2 m dan kain bahan II 0,25 m. Untuk pakaian jenis B memerlukan kain bahan I sebanyak 1 m dan kain bahan II sebanyak 0,5 m. Penjahit tersebut ingin membuat pakaian sedemikian hingga jumlah kedua pakaian tersebut sebanyak-banyaknya. Kain bahan I tersedia 30 m dan kain bahan II tersedia 12 m. Berapa buah pakaian jenis A dan jenis B dapat dibuat sehingga diperoleh jumlah kedua pakaian tersebut maksimal, apabila bahan-bahan lain untuk membuat kedua pakaian tersebut cukup?

Penyelesaian:

Langkah 1 Membuat model matematika dari persoalan program linear di atas.

Pakaian	Bahan	
	I	II
A	2	0,25
B	1	0,5
Bahan yang tersedia	30	12

Misalkan: banyaknya pakaian jenis A yang dibuat adalah x buah dan banyaknya pakaian jenis B yang dibuat adalah y buah.
Persoalan program linear di atas adalah memaksimumkan fungsi tujuan:

$$f(x,y) = x + y$$

dengan syarat-syarat:

$$2x + y \leq 30 \qquad \text{(i)}$$

$$0{,}25x + 0{,}5y \leq 12 \qquad \text{(ii)}$$

$$x \geq 0 \; y \geq 0 \qquad \text{(iii)}$$

$x, y \in C$ (himpunan semua bilangan cacah)

Langkah 2 Menentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear (i)–(iii)
Yang pertama dicari titik potong garis $2x + y = 30$ dan garis $0{,}25x + 0{,}5y = 12$ terhadap sumbu-sumbu koordinat.

$2x + y = 30$		
x	0	15
y	30	0
(x,y)	(0,30)	(15,0)

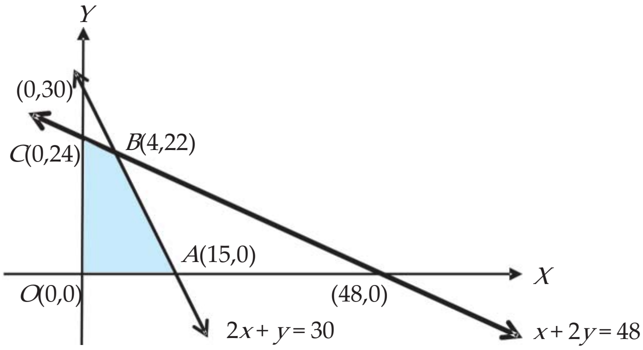
$0{,}25x + 0{,}5y = 12$		
x	0	48
y	24	0
(x,y)	(0,24)	(48,0)

Perhatikan bahwa kita dapat menulis persamaan garis $0{,}25x + 05y = 12$ dengan persamaan $x + 2y = 48$ karena persamaan tersebut mempunyai penyelesaian yang sama dan menghasilkan garis yang sama. Kemudian, dicari titik potong dari kedua garis tersebut.

$$\begin{aligned} 2x + \;\; y &= 30 \;\; \Rightarrow \;\; 2x + \;\; y = 30 \\ x + 2y &= 48 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{2x + 4y = 96} \; - \\ & \qquad\qquad -3y = -66 \;\text{ atau }\; y = 22 \\ & \qquad\qquad\quad x = 48 - 44 = 4 \end{aligned}$$

Jadi, titik potong kedua garis tersebut adalah (4,22).

Himpunan penyelesaian atau daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan (i) – (iii) dapat digambarkan sebagai berikut.



Daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear (i) – (iv) adalah daerah yang dibatasi oleh segi empat *OABC*.

Langkah 3 Menentukan nilai maksimum dari fungsi tujuan pada daerah penyelesaian. Untuk ini kita selidiki nilai $(x + y)$ di titik-titik sudut dari segiempat *OABC*.

Titik	$O(0,0)$	$A(15,0)$	$B(4,22)$	$C(0,24)$
x	0	15	4	0
y	0	0	22	24
$x + y$	0	15	26	24

Jadi, nilai maksimum fungsi tujuan $f(x,y) = x + y$ adalah 26 terjadi di titik $B(4,22)$ atau di $x = 4$ dan $y = 22$.

Langkah 4 Menentukan penyelesaian persoalan program linearnya.
Karena x dari model matematika menyatakan banyaknya pakaian jenis A yang dibuat dan y menyatakan banyaknya pakaian jenis B yang dibuat, maka dapat disimpulkan bahwa untuk mendapatkan jumlah kedua jenis pakaian tersebut maksimal perlu dibuat pakaian jenis A sebanyak 4 dan pakaian jenis B sebanyak 22, dengan total pakaian yang dibuat adalah 26.

□

Contoh 1.4.2

Seorang petani menginginkan tanamannya tidak terserang hama. Agar keinginan tersebut terlaksana tanaman tersebut harus diberi pupuk yang mengandung unsur kimia jenis U, V, dan W masing-masing paling sedikit 27, 21, dan 30 satuan unsur kimia tersebut. Dua jenis pupuk P dan Q diberikan pada tanaman tersebut. Satu kg pupuk jenis P mengandung unsur kimia jenis U, V, dan W masing-masing sebesar 3, 1, dan 1 satuan. Sedangkan satu kg pupuk jenis Q mengandung unsur kimia jenis U, V, dan W masing-masing sebesar 1, 1, dan 2 satuan. Perlu juga diketahui bahwa harga satu kg pupuk jenis P dan Q masing-masing adalah Rp8.000,00 dan Rp6.000,00. Petani tersebut harus memilih satu jenis pupuk saja atau kedua-duanya, kemudian mencampurkannya agar petani tersebut mengeluarkan uang seminimal mungkin. Selesaikan persoalan petani tersebut.

Penyelesaian:

Informasi dari persoalan program linear di atas dapat disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut.

Jenis Pupuk	Unsur Kimia			Harga
	Jenis U	Jenis V	Jenis W	
P	3	1	1	8.000
Q	1	1	2	6.000
Total min.	27	21	30	

Langkah 1 Membuat model matematika dari persoalan program linear di atas.

Misalkan: banyaknya pupuk jenis P yang dibeli adalah x kg

banyaknya pupuk jenis Q yang dibeli adalah y kg

Persoalan program linear di atas adalah mencari x dan y yang meminimalkan fungsi tujuan:

$$f(x,y) = 8.000x + 6.000y$$

dengan syarat-syarat:

$$3x + y \geq 27 \quad \text{(i)}$$
$$x + y \geq 21 \quad \text{(ii)}$$
$$x + 2y \geq 30 \quad \text{(iii)}$$
$$x \geq 0 \quad \text{(iv)}$$
$$y \geq 0 \quad \text{(v)}$$

Langkah 2 Menentukan himpunan atau daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear (i) – (v).

Yang pertama dicari adalah titik potong garis-garis $3x + y = 27$, $x + y = 21$, dan garis $x + 2y = 30$ terhadap sumbu-sumbu koordinat.

$3x + y = 27$		
x	0	9
y	27	0
(x,y)	(0,27)	(9,0)

$x + y = 21$		
x	0	21
y	21	0
(x,y)	(0,21)	(21,0)

$x + 2y = 30$		
x	0	30
y	15	0
(x,y)	(0,15)	(30,0)

Titik potong garis $3x + y = 27$ dan garis $x + y = 21$ ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{rcl} 3x + y &=& 27 \\ x + y &=& 21 \\ \hline 2x &=& 6 \\ x &=& 3 \\ y &=& 18 \end{array} -$$

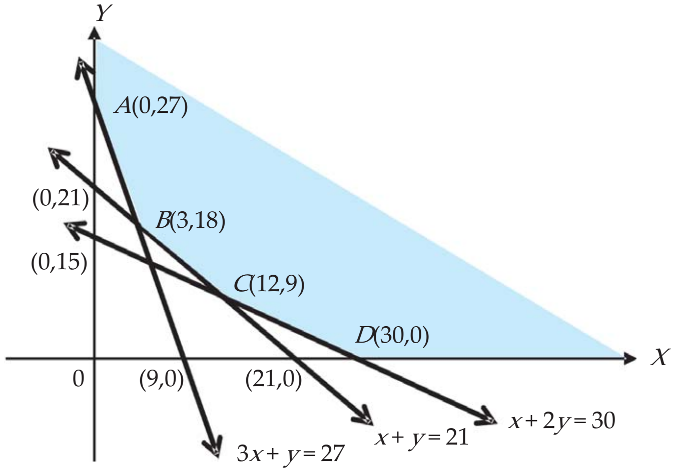
Jadi, titik potong kedua garis tersebut adalah $B(3,18)$.

Titik potong garis $x + y = 21$ dan garis $x + 2y = 30$ ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 21 \\ x + 2y &=& 30 \\ \hline -y &=& -9 \\ y &=& 9 \\ x &=& 12 \end{array} -$$

Jadi, titik potong kedua garis tersebut adalah $C(12,9)$.

Daerah penyelesaian (DP) dari sistem pertidaksamaan linear (i) – (iv) dapat digambarkan sebagai berikut.



Langkah 3 Menentukan nilai minimum dari fungsi tujuan pada daerah penyelesaian. Untuk ini kita selidiki nilai ($8.000x + 6.000y$) di titik-titik sudut A, B, C, dan D.

Titik	$A(0,27)$	$B(3,18)$	$C(12,9)$	$D(30,0)$
x	0	3	12	30
y	27	18	9	0
$8.000x + 6.000y$	162.000	132.000	150.000	240.000

Jadi, nilai minimum fungsi tujuan $f(x,y) = 8.000x + 6.000y$ adalah 132.000 terjadi di titik $B(3,18)$ atau di $x = 3$ dan $y = 18$, dengan biaya minimal adalah Rp132.000,00.

Langkah 4 Menentukan penyelesaian persoalan program linearnya. Agar dikeluarkan biaya sedikit mungkin, maka petani tersebut harus membeli pupuk jenis A sebanyak 3 kg dan pupuk jenis B sebanyak 18 kg.

□

Berikut diberikan contoh penyelesaian persoalan program linear yang telah diketahui model matematikanya.

Contoh 1.4.3

Selesaikan persoalan program linear maksimisasi berikut.
Tentukan nilai x dan y yang memaksimumkan fungsi tujuan:

$$f(x,y) = 3x + 2y$$

dengan syarat-syarat:

$$x + 2y \leq 8 \quad \text{(i)}$$
$$x + y \leq 6 \quad \text{(ii)}$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \text{(iii)}$$

Penyelesaian:

Sebelumnya ditentukan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan (i) – (iii). Untuk ini dicari titik potong garis $x + 2y = 8$ dan garis $2x + y = 12$ terhadap sumbu-sumbu koordinat.

$x+2y=8$		
x	0	8
y	4	0
(x,y)	(0,4)	(8,0)

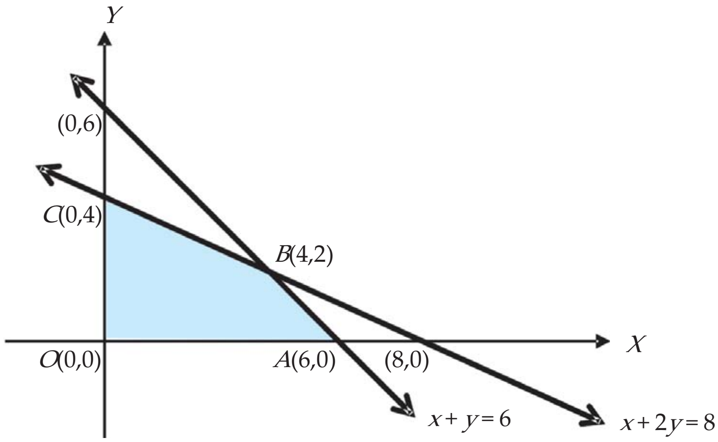
$x+y=6$		
x	0	6
y	6	0
(x,y)	(0,6)	(6,0)

Titik potong garis $x+2y=8$ dan garis $x+y=6$ ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{r} x+2y=8 \\ \underline{x+\ \ y=6}\ - \\ y=2 \end{array}\ \text{dan akibatnya}\ x=6-2=4$$

Jadi, titik potong kedua garis tersebut adalah (4,2).

Himpunan penyelesaian atau daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan (i) – (iii) dapat digambarkan sebagai berikut.



Daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear (i) – (iii) adalah daerah yang dibatasi oleh segi empat *OABC*.

Nilai maksimum dari fungsi tujuan pada daerah penyelesaian dapat ditentukan dengan menyelidiki nilai $f(x,y)=3x+2y$ di titik-titik sudut dari segi empat *OABC*.

Titik	$O(0,0)$	$A(6,0)$	$B(4,2)$	$C(0,4)$
x	0	6	4	0
y	0	0	2	4
$3x+2y$	0	18	16	8

Jadi, nilai maksimum fungsi tujuan $f(x,y)=3x+2y$ adalah 18 terjadi di titik $A(6,0)$ atau di $x=6$ dan $y=0$.

□

Tugas Mandiri

Carilah informasi di internet yang terkait dengan persoalan program linear, kemudian buatlah laporan dan diskusikan dengan teman-teman Anda. Selanjutnya presentasikan hasil diskusi tersebut di depan kelas.

Latihan 1.4

1. Sebuah perusahaan memproduksi dua jenis barang yaitu barang jenis P dan Q. Kedua barang tersebut dibuat dengan menggunakan dua mesin yaitu mesin I dan mesin II. Untuk membuat barang P diperlukan 2 jam pada mesin I dan 3 jam di mesin II, sedangkan untuk membuat barang Q diperlukan 4 jam di mesin I dan 2 jam di mesin II. Mesin I dapat bekerja 20 jam setiap hari dan mesin II dapat bekerja 18 jam setiap hari. Jika dari setiap barang P diperoleh laba Rp5.000,00 dan dari setiap barang Q diperoleh laba Rp8.000,00, tentukan banyaknya barang jenis P dan barang jenis Q yang harus dibuat agar diperoleh keuntungan yang maksimum. Hitunglah keuntungan maksimumnya.
2. Sebuah perusahaan roti memerlukan 250 gram tepung dan 150 gram mentega untuk membuat roti jenis A, sedangkan untuk membuat roti jenis B diperlukan 150 gram tepung dan 100 gram mentega. Perusahaan tersebut mempunyai persediaan tepung sebanyak 30 kg tepung dan 15 kg mentega. Berapakah banyaknya masing-masing jenis roti dari kedua jenis tersebut dapat dibuat agar diperoleh banyaknya roti dari kedua jenis tersebut maksimal?
3. Sebuah pesawat udara mempunyai tempat duduk tidak lebih dari 400 penumpang. Setiap penumpang kelas eksekutif boleh membawa barang di bagasi maksimum 60 kg, sedangkan penumpang kelas ekonomi bagasinya dibatasi 20 kg. Pesawat itu hanya dapat membawa bagasi tidak lebih dari 12.000 kg. Bila tiket untuk setiap penumpang kelas eksekutif Rp800.000,00 dan tiket untuk kelas ekonomi Rp300.000,00, tentukan berapa banyaknya penumpang masing-masing kelas tersebut agar diperoleh pendapatan sebanyak-banyaknya.
4. Carilah nilai x dan y yang memaksimumkan fungsi tujuan:
   $$f(x,y) = 5x + 4y$$
   dengan syarat-syarat:
   $$\begin{aligned} 3x + 2y &\leq 12 \\ x + 3y &\leq 9 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$
5. Carilah nilai x dan y yang meminimumkan fungsi tujuan:
   $$f(x,y) = 3x + 2y$$
   dengan syarat-syarat:
   $$\begin{aligned} 3x + y &\geq 6 \\ x + y &\geq 4 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

1.5 Penggunaan Garis Selidik untuk Nilai Optimum

Di dalam subbab ini dikenalkan cara baru untuk menentukan nilai maksimum atau nilai minimum fungsi tujuan atau fungsi objektif $f(x,y) = ax + by$ pada daerah penyelesaian dengan menggunakan suatu garis yang disebut garis selidik. Secara umum, garis selidik dinyatakan dalam bentuk $ax + by = k$. Jadi, yang dimaksud dengan garis selidik $ax + by = k$ adalah suatu garis yang berfungsi untuk menyelidiki dan menentukan nilai maksimum atau nilai minimum fungsi tujuan $f(x,y) = ax + by$ pada daerah penyelesaiannya.

Langkah-langkah penggunaan garis selidik $ax + by = k$ dilakukan sebagai berikut.

1. Gambarlah garis $ax + by = ab$ pada sistem koordinat Cartesius yang memotong sumbu X di titik $(b,0)$ dan memotong sumbu y di titik $(0,a)$. Garis ini sebagai patokan awal. Garis $ax + by = ab$ dapat digeser-geser sejajar dengan garis tersebut sehingga nilai $f(x,y) = ax + by$ juga akan berubah-ubah. Nilai $f(x,y)$ akan semakin bertambah jika garis tersebut digeser ke kanan dan akan berkurang jika digeser ke kiri.
2. Buatlah garis-garis yang sejajar dengan garis $ax + by = ab$, dengan memperhatikan ketentuan-ketentuan sebagai berikut.
   a. Jika garis $ax + by = k$ merupakan garis yang sejajar dengan garis $ax + by = ab$ dan memotong tepat satu titik daerah penyelesaian di bagian paling atas atau paling kanan, maka $f(x,y) = ax + by = k$ merupakan nilai maksimum dari fungsi tujuan. Titik potong tersebut merupakan titik yang menyebabkan nilai tujuan tersebut maksimum.
   b. Jika garis $ax + by = k$ merupakan garis yang sejajar dengan garis $ax + by = ab$ dan memotong tepat satu titik daerah penyelesaian di bagian paling bawah atau paling kiri, maka $f(x,y) = ax + by = k$ merupakan nilai minimum dari fungsi tujuan. Titik potong tersebut merupakan titik yang menyebabkan nilai tujuan tersebut minimum.
   c. Jika garis $ax + by = k$ merupakan garis yang sejajar dengan garis $ax + by = ab$ dan berimpit dengan salah satu garis pembatas dari daerah penyelesaian di bagian paling atas atau paling kanan, maka $f(x,y) = ax + by = k$ merupakan nilai maksimum dari fungsi tujuan. Setiap titik pada garis tersebut dan yang beririsan dengan daerah penyelesaian merupakan titik-titik yang menyebabkan nilai tujuan tersebut maksimum. Hal ini disebabkan karena nilai $f(x,y)$ pada garis yang beririsan tersebut nilainya sama dan merupakan nilai maksimum dari fungsi tujuan $f(x,y)$ pada daerah penyelesaian.
   d. Jika garis $ax + by = k$ merupakan garis yang sejajar dengan garis $ax + by = ab$ dan berimpit dengan salah satu garis pembatas dari daerah penyelesaian di bagian paling bawah atau paling kiri, maka $f(x,y) = ax + by = k$ merupakan nilai minimum dari fungsi tujuan. Setiap titik pada garis tersebut dan yang beririsan dengan daerah penyelesaian merupakan titik-titik yang menyebabkan nilai tujuan tersebut minimum. Hal ini disebabkan karena nilai $f(x,y)$ pada garis yang beririsan tersebut nilainya sama dan merupakan nilai minimum dari fungsi tujuan $f(x,y)$ pada daerah penyelesaian.

Contoh 1.5.1

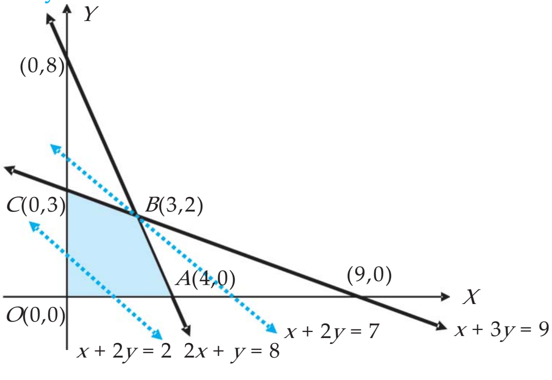
Tentukan nilai x dan y yang memaksimumkan fungsi tujuan:

$$f(x,y) = x + 2y$$

dengan syarat-syarat:

$$2x + y \leq 8$$
$$x + 3y \leq 9$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

Penyelesaian:



Titik potong kedua garis:

$$\begin{array}{rl} 6x + 3y &= 24 \\ x + 3y &= 9 \quad - \\ \hline 5x &= 15 \\ x &= 3 \quad \text{dan} \quad y = 2 \end{array}$$

Daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear di atas adalah daerah segi empat $OABC$. Jika dibuat garis-garis $x + 2y = k$, dengan k sebarang bilangan real, maka garis tersebut sejajar dengan garis $x + 2y = 2$. Ternyata makin jauh kedudukan garis tersebut dengan titik O, maka nilai k semakin besar. Karena nilai k bersesuaian dengan nilai dari fungsi tujuan, maka k terbesar sedemikian hingga garis $x + 2y = k$ masih memotong daerah penyelesaian merupakan nilai maksimum dari fungsi tujuan, dan nilai k terkecil sedemikian hingga garis $x + 2y = k$ masih memotong daerah penyelesaian merupakan nilai minimum dari fungsi tujuan. Perhatikan gambar di atas, bahwa garis $x + 2y = 7$ merupakan garis paling kanan yang masih memotong daerah penyelesaian. Jadi, nilai maksimum fungsi tujuan $f(x,y) = x + 2y$ pada daerah penyelesaian tersebut adalah 7 dicapai pada titik $B(3,2)$.

□

Contoh 1.5.2

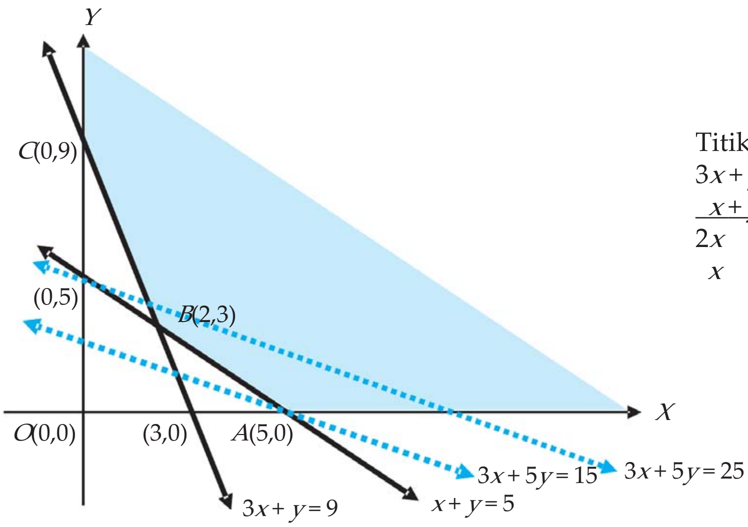
Tentukan nilai x dan y sedemikian hingga fungsi tujuan:

$$f(x,y) = 3x + 5y \qquad \text{minimum}$$

dengan syarat-syarat:

$$\begin{aligned} 3x + y &\geq 9 \\ x + y &\geq 5 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian:



Titik potong kedua garis:

$$\begin{array}{ll} 3x + y = 9 & \\ \underline{\ \ x + y = 5} & - \\ 2x \qquad = 4 & \\ \ \ x \qquad = 2 & \text{dan } \ y = 3 \end{array}$$

Daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear di atas adalah daerah yang diarsir. Jika dibuat garis-garis $3x + 5y = k$, dengan k sebarang bilangan real, maka garis tersebut sejajar dengan garis $3x + 5y = 15$. Ternyata makin jauh kedudukan garis tersebut dengan titik O, maka nilai k semakin besar. Karena nilai k bersesuaian dengan nilai dari fungsi tujuan, maka k terbesar sedemikian hingga garis $3x + 5y = k$ masih memotong daerah penyelesaian merupakan nilai maksimum dari fungsi tujuan, dan nilai k terkecil sedemikian hingga garis $3x + 5y = k$ masih memotong daerah penyelesaian merupakan nilai minimum dari fungsi tujuan. Perhatikan gambar di atas, bahwa garis $3x + 5y = 15$ merupakan garis paling kiri yang masih memotong daerah penyelesaian, yaitu di titik $A(5,0)$.

Jadi, nilai minimum fungsi tujuan $f(x,y) = 3x + 5y$ pada daerah penyelesaian tersebut adalah 15 dicapai pada titik $A(5,0)$.

Seperti pembahasan subbab sebelumnya, bahwa beberapa persoalan program linear belum diketahui model matematikanya, sehingga langkah pertama harus menyusun lebih dahulu model matematikanya. Sedangkan langkah kedua menyelesaikan model matematika dan langkah yang terakhir adalah menginterpretasikan penyelesaian model matematika ke penyelesaian program linearnya. Berikut diberikan sebuah contoh yang menggambarkan tentang hal ini.

Contoh 1.5.3

Sebuah rombongan anggota OSIS yang terdiri dari 40 orang ingin mengadakan studi banding ke sekolah di luar kota. Untuk itu mereka harus menyewa penginapan. Penginapan melati mempunyai dua tipe kamar, yaitu tipe A dan tipe B. Tipe A dapat ditempati 2 orang dan tipe B dapat ditempati 5 orang. Pemilik penginapan menghendaki rombongan menyewa kamar paling sedikit 14 kamar. Harga per kamar tipe A adalah Rp25.000,00 dan harga per kamar tipe B adalah Rp40.000,00. Berapa banyaknya kamar harus disewa agar semua anggota rombongan dapat ditampung dan dengan biaya semurah-murahnya?

Penyelesaian:

Misalkan: banyaknya kamar tipe A yang disewa adalah x kamar dan
banyaknya kamar tipe B yang disewa adalah y kamar

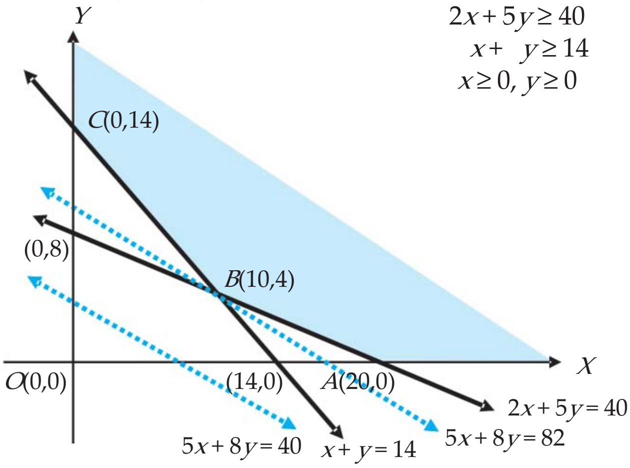
Berdasarkan persoalan program linear tersebut di atas, diperoleh model matematika sebagai berikut.

Minimumkan fungsi tujuan:

$$f(x,y) = 25.000x + 40.000y$$

dengan syarat-syarat:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &\geq 40 \\ x + y &\geq 14 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$



Titik potong kedua garis:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 40 \\ \underline{2x + 2y} &\underline{= 28} \; - \\ 3y &= 12 \\ y &= 4 \quad \text{dan} \quad x = 10 \end{aligned}$$

Garis tujuannya adalah $25.000x + 40.000y = k$ atau $5x + 8y = p$, dengan $p = \dfrac{k}{5.000}$.

Daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear di atas adalah daerah di atas garis $x + y = 14$, garis $2x + 5y = 40$, dan sumbu X serta di sebelah kanan sumbu Y. Kemudian dibuat garis-garis selidik $5x + 8y = p$, dengan p suatu bilangan real. Garis tersebut sejajar dengan garis $5x + 8y = 40$. Garis selidik paling kiri atau paling bawah yang masih memotong daerah penyelesaian adalah garis $5x + 8y = 82$. Garis selidik tersebut memotong daerah penyelesaian di titik $B(10,4)$. Ini berarti nilai $x = 10$ dan $y = 4$ merupakan penyelesaian dari model matematika di atas.

Jadi, banyaknya kamar tipe A yang disewa adalah 10 kamar dan tipe B yang disewa adalah 4 kamar, dengan biaya sewa adalah Rp 410.000,00.

□

Tugas Mandiri

Jika garis selidik sejajar/berimpit dengan salah satu garis batas, bagaimana menentukan nilai optimumnya?

Latihan 1.5

1. Dengan menggunakan garis selidik, carilah nilai x dan y sedemikian hingga fungsi tujuan:

   $$f(x,y) = 5x + 3y \quad \text{maksimum}$$

   dengan syarat-syarat:

   $$\begin{aligned} 2x + y &\le 3 \\ x + y &\le 2 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

2. Dengan menggunakan garis selidik, carilah nilai x dan y sedemikian hingga fungsi tujuan:

   $$f(x,y) = 8x + 6y \quad \text{minimum}$$

   dengan syarat-syarat:

   $$\begin{aligned} 2x + y &\ge 30 \\ x + 2y &\ge 24 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

3. Dengan menggunakan garis selidik, carilah nilai x dan y sedemikian hingga fungsi tujuan:

   $$f(x,y) = 5x + 4y \quad \text{maksimum}$$

   dengan syarat-syarat:

   $$\begin{aligned} 2x + 3y &\le 12 \\ 2x + y &\le 8 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

4. Dengan menggunakan garis selidik, carilah nilai x dan y sedemikian hingga fungsi tujuan:

   $$f(x,y) = 3x + 4y \quad \text{minimum}$$

   dengan syarat-syarat:

   $$\begin{aligned} 2x + y &\ge 20 \\ 4x + 3y &\ge 48 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

5. Dengan menggunakan garis selidik, selesaikan persoalan program linear berikut. Untuk memproduksi suatu barang tipe *A* diperlukan bahan baku 30 kg dan waktu kerja mesin 18 jam, sedangkan untuk memproduksi barang tipe *B* diperlukan bahan baku 20 kg dan waktu kerja mesin 24 jam. Waktu kerja mesin yang tersedia adalah 720 jam dan banyaknya bahan baku yang tersedia adalah 750 kg. Jika harga penjualan 1 unit barang *A* adalah Rp5.000,00 dan harga 1 unit barang *B* adalah Rp4000,00, tentukan banyaknya produksi perusahaan tersebut agar diperoleh hasil penjualan maksimum.

6. Sebuah perusahaan roti ingin membuat dua buah macam roti, yaitu roti tipe *A* dan roti tipe *B*. Bahan baku yang tersedia adalah telur 190 kg, gula 300 kg, tepung 380 kg, dan mentega 240 kg. Untuk membuat satu buah roti tipe *A* diperlukan 0,3 kg telur, 0,2 kg gula, 0,2 kg tepung, dan 0,3 kg mentega. Untuk membuat satu buah roti tipe *B* diperlukan 0,1 kg telur, 0,2 kg gula, 0,5 kg tepung, dan 0,2 kg mentega. Harga jual satu buah roti tipe *A* adalah Rp20.000,00 dan harga jual satu buah roti tipe *B* adalah Rp15.000,00. Berapakah banyaknya roti tipe *A* dan roti tipe *B* harus dibuat agar diperoleh hasil penjualan yang maksimal?

Rangkuman

1. Sistem pertidaksamaan linear
   Sistem pertidaksamaan linear yaitu suatu koleksi beberapa pertidaksamaan linear yang membentuk satu kesatuan. Titik (s,t) merupakan penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan linear jika kita substitusikan $x = s$ dan $y = t$ pada setiap pertidaksamaan linear pada sistem pertidaksamaan linear tersebut menghasilkan pernyataan yang bernilai benar.
   Langkah-langkah untuk menentukan daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear adalah:
   a. Gambarlah persamaan garis yang bersesuaian dengan sistem pertidaksamaan yang dimaksud.
   b. Ambil sebuah titik uji, kemudian periksa apakah memenuhi pertidaksamaan atau tidak.
   c. Tandai bagian yang memenuhi pertidaksamaan yang dimaksud.
2. Model matematika
   Model matematika, yaitu rumusan dari permasalahan-permasalahan real ke dalam bentuk matematika, sehingga persoalan tersebut dapat diselesaikan secara matematis.
3. Persoalan program linear
   Persoalan program linear, yaitu persoalan menentukan nilai optimum (maksimum atau minimum) dari suatu fungsi objektif terhadap fungsi-fungsi kendala yang diberikan, sehingga persoalan program linear selalu terdiri dari dua bagian, yaitu:
   a. Fungsi tujuan/objektif (memaksimumkan atau meminimumkan).
   b. Fungsi kendala (berupa sistem pertidaksamaan linear).
4. Menentukan nilai optimum fungsi objektif
   Ada beberapa cara untuk menentukan nilai optimum (maksimum atau minimum) suatu fungsi objektif, antara lain dapat digunakan:
   a. cara uji titik pojok
   b. cara garis selidik

Math Info

Rene Descartes dikenal sebagai ahli filsafat modern pertama yang besar. Ia juga penemu biologi, ahli fisika dan matematikawan. Descartes lahir di Touraine, Perancis, putra seorang ahli hukum. Pada umur 20 tahun, dia mendapatkan gelar sarjana hukum. Karya matematikanya yang paling populer adalah *la Geometrie,* yang diterbitkan tahun 1637. Ini merupakan penggabungan geometri dan aljabar, selanjutnya dikenal sebagai geometri analitik atau geometri koordinat. Program linear menggunakan geometri analitik atau geometri koordinat dalam penyelesaiannya.

Sumber: kevinstilley.com

Gambar 1.9 Rene Descartes

Uji Kompetensi

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

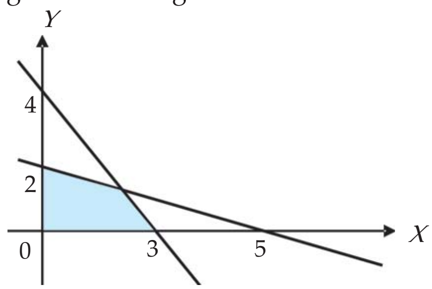
1. Persamaan garis lurus yang melalui titik (0,6) dan (8,0) adalah ... .
   A. $4x + 3y = 24$
   B. $4x - 3y = 24$
   C. $4x + 3y = -24$
   D. $4y + 3x = 24$
   E. $4y - 3x = 24$

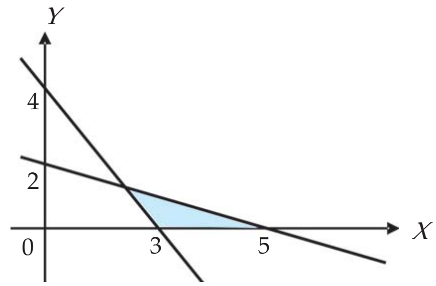
2. Titik potong antara garis $x + y = 10$ dan $x - 2y = 4$ adalah ... .
   A. (2,8)
   B. (8,2)
   C. (8,–2)
   D. (–2,8)
   E. (–8,2)

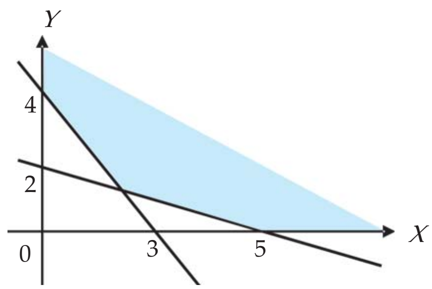
3. Diketahui sistem pertidaksamaan linear:

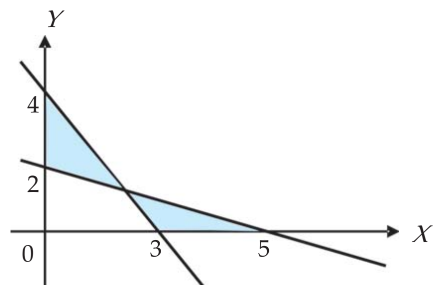
$$4x + 3y \leq 12$$
$$2x + 5y \geq 10$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

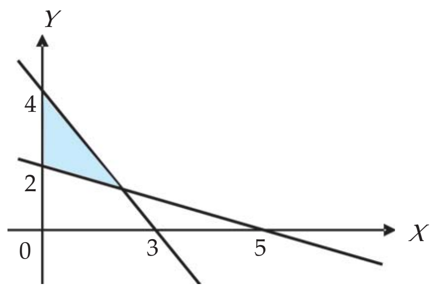
   Daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear di atas adalah daerah yang diarsir dari gambar ... .

   A.


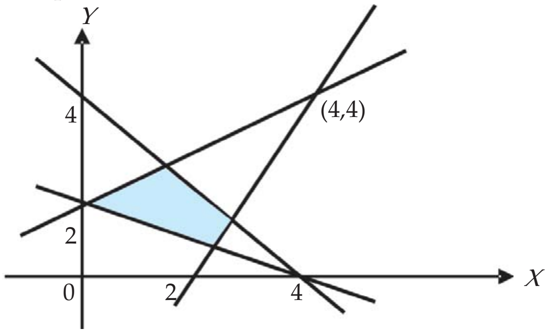
   D.


   B.


   E.


   C.


4. Daerah yang diarsir pada diagram Cartesius di bawah ini merupakan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan ... .



A. $x + y \leq 4$
$x + 2y \geq 4$
$x - 2y \leq -4$
$2x - y \geq 4$

B. $x + y \leq 4$
$x + 2y \geq 4$
$x - 2y \geq 4$
$2x - y \leq 4$

C. $x + y \leq 4$
$x + 2y \leq 4$
$x - 2y \leq -4$
$2x - y \leq 4$

D. $x + y \geq 4$
$x + 2y \geq 4$
$x - 2y \leq -4$
$2x - y \leq 4$

E. $x + y \leq 4$
$x + 2y \geq 4$
$x - 2y \geq -4$
$2x - y \leq 4$

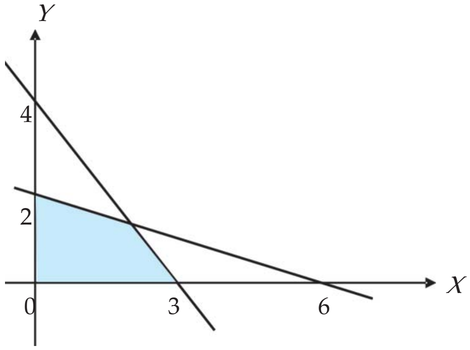
5. Sebuah pedagang buah jeruk mempunyai 1.000 buah jeruk dan 80% di antaranya dijual di pasar. Dalam perjalanan ke pasar, kendaraannya mengalami kecelakaan sehingga 250 jeruk yang dibawa rusak. Jika q menyatakan banyakya jeruk yang masih baik, maka model matematikanya adalah ... .
A. $q = 80\% \times (1000 - 250)$
B. $q + 250 = 80\% \times 1000$
C. $q = 80\% \times (1000 + 250)$
D. $q - 250 = 80\% \times 1000$
E. $80\% \times q + 250 = 1000$

6. Seorang pengusaha angkutan mempunyai dua jenis angkutan, yaitu jenis A dan B dan mendapatkan order untuk mengirimkan barang sebanyak minimal 1.200 kotak. Angkutan jenis A mampu memuat 40 kotak dan angkutan jenis B mampu memuat 60 kotak. Jika x menyatakan banyaknya kendaraan A mengangkat barang dan y menyatakan banyaknya kendaraan B mengangkat barang, maka model pertidaksamaan linear yang sesuai dengan persoalan ini adalah ... .
A. $2x + 3y \geq 60$
B. $2x + 3y \leq 60$
C. $2x + 3y = 60$
D. $3x + 2y \geq 60$
E. $3x + 2y \leq 60$

7. Seorang pengusaha tempat parkir mempunyai lahan perparkiran seluas 1.000 m^2. Tempat tersebut dipakai untuk tempat parkir bis dan mobil taxi. Jika bis memerlukan tempat seluas 30 m^2 dan mobil taxi memerlukan tempat 15 m^2, maka model pertidaksamaan linear yang sesuai dengan persoalan ini adalah ... .
A. $6x + 3y \geq 200$
B. $3x + 6y \leq 200$
C. $6x + 3y \leq 200$
D. $3x + 6y \geq 200$
E. $6x + 3y = 200$

8. Perusahaan "Adi Prabowo" memproduksi 2 jenis mesin yaitu jenis A dan jenis B, masing-masing memerlukan dua bahan yaitu bahan I dan bahan II. Untuk mesin jenis A memerlukan bahan I sebanyak 2 satuan dan bahan II sebanyak 0,25 m. Untuk mesin jenis B memerlukan bahan I sebanyak 1 satuan dan bahan II sebanyak 0,5 satuan. Bahan I tersedia 30 satuan dan bahan II tersedia 12 satuan. Jumlah kedua mesin yang dapat dibuat sebanyak-banyaknya adalah ... .
   A. 15
   B. 24
   C. 28
   D. 30
   E. 26

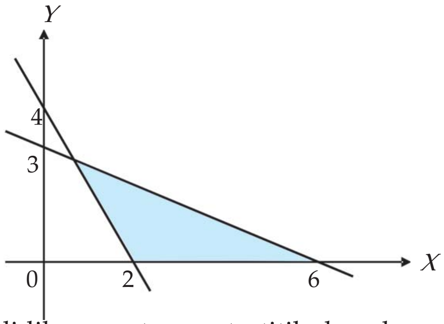
9. Daerah penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan linear sebagai berikut.



   Nilai maksimum fungsi tujuan $f(x,y) = 3x + 2y$ untuk daerah yang diarsir di atas adalah ... .
   A. 0
   B. 18
   C. $8\frac{2}{3}$
   D. 9
   E. 8

10. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear $2x - y \geq 0$, $x + y \geq 3$, dan $4x + y \leq 12$ mempunyai daerah yang berbentuk ... .
   A. segi empat sembarang
   B. persegi panjang
   C. segitiga
   D. trapesium
   E. segi lima

11. Diketahui daerah penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan linear sebagai berikut.



   Persamaan garis selidik memotong satu titik daerah penyelesaian dan menyebabkan fungsi tujuan $f(x,y) = 5x + 4y$ maksimum, dengan nilai maksimum ... .
   A. 36
   B. 30
   C. 16
   D. 14
   E. 10

12. Nilai minimum fungsi $f(x,y) = 8x + 6y$ pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear: $2x + y \geq 30$, $x + 2y \geq 24$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ adalah ... .
    A. 192
    B. 180
    C. 142
    D. 132
    E. 72

13. Setiap bulan seseorang membutuhkan bahan makanan yang mengandung zat kimia jenis A tidak kurang dari 30 satuan dan jenis B tidak kurang dari 24 satuan. Untuk memenuhi kebutuhan tersebut terdapat 2 macam jenis makanan, yaitu makanan jenis M_1 dan M_2. Makanan jenis M_1 setiap 1 kg mengandung 2 satuan zat kimia jenis A dan 2 satuan zat kimia jenis B. Makanan jenis M_2 setiap 1 kg mengandung 2 satuan zat kimia jenis A dan 1 satuan zat kimia jenis B. Harga makanan jenis M_1 adalah Rp8.000,00 per kg dan harga makanan jenis M_2 adalah Rp5.000,00 per kg. Besarnya biaya minimal yang harus dikeluarkan orang tersebut agar kebutuhan zat kimia tersebut terpenuhi adalah ... .
    A. Rp60.000,00
    B. Rp75.000,00
    C. Rp120.000,00
    D. Rp96.000,00
    E. Rp93.000,00

14. Sebuah pesawat udara mempunyai tempat duduk tidak lebih dari 300 penumpang. Setiap penumpang kelas eksekutif boleh membawa barang di bagasi maksimum 60 kg, sedangkan penumpang kelas ekonomi bagasinya dibatasi 20 kg. Pesawat itu hanya dapat membawa bagasi tidak lebih dari 12.000 kg. Bila tiket untuk setiap penumpang kelas eksekutif Rp800.000,00 dan tiket untuk kelas ekonomi Rp500.000,00, maka banyaknya penumpang masing-masing kelas tersebut agar diperoleh pendapatan sebanyak-banyaknya adalah ... .
    A. Rp195.000.000,00
    B. Rp160.000.000,00
    C. Rp150.000.000,00
    D. Rp240.000.000,00
    E. Rp300.000.000,00

15. Nilai x dan y yang memaksimumkan fungsi tujuan: $f(x,y) = 5x + 4y$ pada daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan: $3x + y \leq 15$, $x + y \leq 9$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ adalah ... .
    A. 38
    B. 45
    C. 60
    D. 36
    E. 25

B. Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan langkah-langkah yang tepat!

16. Jika $f(x,y) = 5x + 2y$ dan $g(x,y) = 2x + 3y$ serta x, y adalah bilangan-bilangan bulat positif, tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi f dan g pada masing-masing sistem pertidaksamaan linear berikut.
    a. $2x + y \leq 4$, $x + 6y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
    b. $x + 2y \leq 10$, $5x + 2y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

17. Luas daerah parkir adalah 500 m^2. Luas rata-rata untuk sebuah mobil box 10 m^2 dan untuk sebuah truk 15 m^2. Daerah parkir tersebut tidak boleh menampung lebih dari 40 kendaraan. Jika tarif parkir untuk mobil box dan truk masing-masing adalah Rp4.000,00 dan Rp5.000,00, hitunglah banyaknya mobil box dan truk masing-masing harus parkir agar diperoleh pendapatan maksimum dan tentukan pendapatan maksimum tersebut.

18. Suatu kapal laut mempunyai tempat duduk tidak lebih dari 500 orang. Setiap penumpang kelas eksekutif boleh membawa barang paling banyak 60 kg, sedang untuk kelas ekonomi boleh membawa barang sebanyak 40 kg. Kapal tersebut hanya dapat membawa barang tidak lebih dari 18. 000 kg. Bila tiket untuk setiap penumpang kelas eksekutif Rp400.000,00 dan kelas ekonomi Rp200.000,00, berapa banyaknya penumpang masing-masing kelas agar diperoleh pendapatan sebanyak-banyaknya? Buatlah model matematika untuk persoalan ini dan selesaikan.
19. Seorang petani menginginkan tanamannya tidak terserang hama. Agar keinginannya tersebut terlaksana, tanaman tersebut harus diberi pupuk yang mengandung unsur kimia jenis X, Y, dan Z masing-masing paling sedikit 24, 22, dan 36 satuan unsur kimia tersebut. Dua jenis pupuk, A dan B, diberikan pada tanaman tersebut. Satu kg pupuk jenis A mengandung unsur kimia jenis X, Y, dan Z masing-masing sebesar 2, 1, dan 1 satuan. Sedangkan satu kg pupuk jenis B mengandung unsur kimia jenis X, Y, dan Z masing-masing sebesar 1, 1, dan 2 satuan. Harga satu kg pupuk jenis A dan B masing-masing adalah Rp8.000,00 dan Rp6.000,00. Tentukan biaya minimum yang dikeluarkan petani agar keinginannya tercapai.
20. Sebuah perusahaan roti ingin membuat dua buah macam roti, yaitu roti tipe A dan roti tipe B. Bahan baku yang tersedia adalah telur 400 kg, gula 500 kg, tepung 800 kg, dan mentega 200 kg. Untuk membuat satu buah roti tipe A diperlukan 0,2 kg telur, 0,2 kg gula, 1 kg tepung, dan 0,3 kg mentega. Untuk membuat satu buah roti tipe B diperlukan 0,1 kg telur, 0,2 kg gula, 0,8 kg tepung, dan 0,2 kg mentega. Harga jual satu buah roti tipe A adalah Rp12.000,00 dan harga jual satu buah roti tipe B adalah Rp10.000,00. Berapakah banyaknya roti tipe A dan roti tipe B harus dibuat agar diperoleh hasil penjualan yang maksimal?

Soal Analisis

1. Seorang pasien disarankan mengkomsumsi sedikitnya 16 unit vitamin A dan 12 unit vitamin B per hari. Ia dapat minum vitamin tambahan dalam bentuk pil atau kapsul. Tiap butir pil mengandung 2 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B, sedangkan tiap butir kapsul mengandung 4 unit vitamia A dan 2 unit vitamin B. Jika harga pil dan kapsul berturut-turut Rp400,00 dan Rp300,00 per butir, berapakah tiap hari harus ia minum agar pengeluaran untuk membeli obat minimum?
2. Seorang pemilik toko ingin mengisi tokonya dengan sepatu laki-laki paling sedikit 100 pasang dan sepatu wanita 150 pasang. Toko tersebut dapat memuat 400 pasang sepatu. Keuntungan setiap pasang sepatu laki-laki Rp1.000,00 dan setiap pasang sepatu wanita Rp500,00. Jika banyaknya sepatu laki-laki tidak boleh melebihi 150 pasang, berapakah keuntungan yang terbesar yang dapat diperoleh?
3. Pesawat penumpang mempunyai tempat duduk 48 kursi. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 60 kg, sedang kelas ekonomi 20 kg. Pesawat hanya dapat membawa bagasi 1.440 kg. Harga tiket kelas utama Rp150.000,00 dan kelas ekonomi Rp100.000,00. Agar pendapatan dari penjual tiket pada saat pesawat penuh mencapai maksimum, berapakah jumlah tempat duduk kelas utama?

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama : .... Tanggal : ....
Kelas : XII Materi Pokok : Program Linear
Kelompok : .... Semester : 1 (satu)
Kegiatan : Survei persoalan program linear di dalam kehidupan sehari-hari
Tujuan : Menentukan nilai optimum (maksimum dan minimum) fungsi tujuan

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. Alat tulis
2. Buku catatan
3. Daftar isian atau lembar kerja
4. Wilayah yang disurvei

B. Cara kerja

1. Buatlah kelompok yang terdiri 4 atau 5 siswa.
2. Ambillah wilayah survei di sekitar tempat tinggal Anda. Lakukan survei terhadap kehidupan di sekitar Anda yang terkait dengan persoalan program linear.
3. Masing-masing kelompok diharapkan dapat menemukan minimal satu persoalan program linear maksimisasi dan satu persoalan program linear minimisasi.
4. Lakukan diskusi untuk menemukan fungsi tujuan dan fungsi kendala dari masing-masing persoalan program linear yang Anda temukan. Hasil diskusi diisikan sesuai tabel berikut ini.

No.	Persoalan Nyata	Model Matematika	
		Fungsi Tujuan	Fungsi Kendala
1.			
2.			
3.			
4.			

5. Berdasarkan data yang Anda peroleh tentang persoalan program linear yang telah disajikan di dalam tabel di atas, lakukan diskusi untuk menentukan penyelesaian dari masing-masing persoalan program linear tersebut.
6. Buatlah laporan kelompok berdasarkan hasil diskusi dan mempersiapkan presentasi di depan kelas.
7. Salah satu wakil kelompok mempresentasikan hasil diskusi di depan kelas, anggota kelompok lain menanggapi, sedangkan anggota kelompok yang presentasi memberikan penjelasan terhadap tanggapan/pertanyaan dari peserta diskusi.

C. Analisis

Berdasarkan data yang telah Anda diskusikan tadi, buatlah analisis tentang setiap persoalan program linear yang Anda temukan.

BAB

II

MATRIKS

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan dapat:
1. menggunakan sifat-sifat dan operasi matriks untuk menunjukkan bahwa suatu matriks persegi merupakan invers dari matriks persegi yang lain,
2. menentukan determinan dan invers matriks,
3. menggunakan determinan dan invers matriks dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel.

Pengantar

Sumber: *jakartawater.org*

Gambar 2.1 Kantor kelurahan

Jika Anda pergi ke kantor kelurahan atau desa, Anda pasti akan menjumpai data statistik penduduk yang menyajikan data tentang jumlah penduduk berdasarkan pekerjaan, tingkat pendidikan, agama, umur, dan lain-lain. Data tersebut pasti disajikan secara rapi dan jelas dibaca. Tampilan data tersebut dinamakan matriks. Anda akan mempelajari pengertian matriks dan sifat-sifatnya di dalam bab ini.

Setelah mempelajari bab ini, Anda diharapkan dapat menggunakan sifat-sifat dan operasi-operasi matriks untuk menentukan invers matriks persegi dan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Selanjutnya dapat juga menyelesaikan persoalan-persoalan sehari-hari yang melibatkan matriks. Untuk memahami materi bab ini, Anda perlu memahami lagi operasi dan sifat-sifat aljabar pada sistem bilangan real dan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan menggunakan eliminasi dan substitusi.

Untuk menunjang pencapaian tujuan di atas, di dalam bab ini akan dibahas berturut-turut pengertian matriks, kesamaan matriks, jenis-jenis matriks, transpose matriks, operasi aljabar pada matriks, determinan matriks, invers matriks, dan aplikasinya pada penyelesaian sistem persamaan linear.

2.1 Pengertian, Notasi, dan Ordo Matriks

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai suatu informasi yang terdiri dari susunan bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom dalam bentuk persegi panjang. Berikut ini beberapa contoh tentang hal ini.

Contoh 2.1.1

Di dalam kelas sering dijumpai papan presensi kehadiran siswa dalam seminggu, seperti tampak pada tabel berikut.

Hari	Hadir	Absen	Banyak Siswa
Senin	42	3	45
Selasa	44	1	45
Rabu	45	0	45
Kamis	43	2	45
Jumat	45	0	45
Sabtu	44	1	45

□

Contoh 2.1.2

Bagi siswa yang tertarik pada sepak bola liga Inggris, berikut sebuah data tentang hasil klasemen sementara 4 besar liga Inggris.

Klub	Main	Menang	Seri	Kalah	Nilai
Chelsea	17	12	4	1	40
Everton	17	11	3	3	36
Arsenal	17	10	5	2	35
Man. United	16	8	6	2	30

□

Contoh 2.1.3

Harga karcis masuk pameran pembangunan adalah:

	Hari Biasa (Rp)	Hari Minggu (Rp)
Anak-anak	2.000	2.500
Dewasa	3.000	4.000

□

Masih banyak lagi contoh informasi seperti di atas yang dapat dijumpai di dalam kehidupan sehari-hari. Sekarang kita perhatikan Contoh 2.1.3, jika kepala lajur dan kepala baris dihilangkan, maka akan tampak sebagai berikut.

2.000	2.500
3.000	4.000

Susunan bilangan berbentuk persegi atau persegi panjang seperti di atas dikatakan membentuk suatu matriks, dan selanjutnya matriks ini sering dinotasikan sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 2000 & 2500 \\ 3000 & 4000 \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix} 2000 & 2500 \\ 3000 & 4000 \end{bmatrix}$$

Secara umum, pengertian matriks didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1

Sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom dalam bentuk persegi panjang. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut disebut elemen atau entri atau unsur dalam matriks.

Contoh 2.1.4

Susunan-susunan berikut adalah suatu matriks.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}, (1 \quad -3 \quad 0), (8)$$

Seperti ditunjukkan pada Contoh 2.1.4, terdapat berbagai macam ukuran matriks. Ukuran (ordo) matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris dan banyaknya kolom yang ada dalam matriks tersebut. Jika sebuah matriks mempunyai m baris dan n kolom, maka dikatakan bahwa ukuran (ordo) dari matriks tersebut adalah $m \times n$. Ordo $m \times n$ berbeda dengan ordo $n \times m$. Matriks pertama dalam Contoh 2.1.4 mempunyai ordo 3×3, matriks ke-2 mempunyai ordo 4×1, matriks ke-3 mempunyai ordo 1×3, dan matriks yang terakhir mempunyai ordo 1×1. Untuk matriks ordo 1×1 sering dituliskan tanpa tanda kurung. Jadi, matriks (8) biasa ditulis dengan 8 saja.

Nama matriks akan diberikan dengan notasi huruf besar dan elemen-elemennya akan dilambangkan dengan huruf kecil, sebagai contoh

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ atau } B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Dari matriks A diperoleh keterangan-keterangan sebagai berikut.

- Ordo matriks A adalah 3×3 karena mempunyai 3 baris dan 3 kolom.
- Elemen-elemen pada baris ke-1 adalah 3, 0, dan 6.
- Elemen-elemen pada baris ke-2 adalah 1, 2, dan 4.
- Elemen-elemen pada baris ke-3 adalah –4, 5, dan 1.

- Elemen-elemen pada kolom ke-1 adalah 3, 1, dan -4.
- Elemen-elemen pada kolom ke-2 adalah 0, 2, dan 5.
- Elemen-elemen pada kolom ke-3 adalah 6, 4, dan 1.

Dari matriks B diperoleh keterangan-keterangan sebagai berikut.

- Ordo matriks B adalah 2×3 karena mempunyai 2 baris dan 3 kolom.
- Elemen-elemen pada baris ke-1 adalah a, b, dan c.
- Elemen-elemen pada baris ke-2 adalah d, e, dan f.
- Elemen-elemen pada kolom ke-1 adalah a dan d.
- Elemen-elemen pada kolom ke-2 adalah b dan e.
- Elemen-elemen pada kolom ke-3 adalah c dan f.

□

Latihan 2.1

1. Bentuklah matriks dari keterangan-keterangan yang ada di dalam tabel berikut, dan kemudian tentukan ordo dari matriks yang Anda peroleh.

   a. Tabel berikut menunjukkan hasil operasi penjumlahan pada jam limaan.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

   b. Tabel berikut menyajikan nilai tugas dan nilai ujian dari Amir dan Ani, untuk mata pelajaran Agama, Bahasa Indonesia, Matematika, dan Bahasa Inggris.

Mata Pelajaran	Amir		A n i	
	Tugas	Ujian	Tugas	Ujian
Agama	90	85	90	75
Bahasa Indonesia	85	90	80	85
Matematika	90	85	70	75
Bahasa Inggris	75	85	85	80

   c. Tabel berikut menunjukkan harga jual tiga kebutuhan pokok pada bulan Januari, Februari, dan Maret dalam satuan kilogram.

Bulan	Beras (Rp)	Gula (Rp)	Minyak Goreng (Rp)
Januari	3.000	4.500	6.500
Februari	2.750	4.300	6.250
Maret	2.800	4.250	6.400

2. Carilah informasi atau keterangan di sekitar lingkungan Anda yang dinyatakan dalam bentuk tabel bilangan, kemudian buatlah daftar matriksnya. Berapakah ordo dari matriks yang Anda peroleh?

3. Diberikan matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & \sqrt{2} & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -5 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   a. Tentukan ordo matriks A.
   b. Tentukan elemen-elemen pada baris pertama.
   c. Tentukan elemen-elemen pada kolom ketiga.
   d. Tentukan elemen pada baris kedua dan kolom keempat.
   e. Tentukan elemen pada baris pertama dan kolom kelima.

4. Buatlah daftar penjumlahan dan perkalian dalam jam empatan, kemudian buatlah daftar matriknya, dan tentukan ordo matriks yang Anda peroleh.

2.2 Kesamaan Dua Matriks

Dua buah matriks, A dan B, dikatakan sama, ditulis $A = B$, jika kedua matriks tersebut mempunyai ordo yang sama dan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak) sama.

Contoh 2.2.1

Tinjaulah matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-2 & \sqrt{9} \end{pmatrix}$$

Walaupun ordo matriks A dan ordo matriks B sama juga elemen-elemennya sama, tetapi tidak semua elemen-elemen yang seletak sama, maka $A \neq B$. Karena ordo matriks A tidak sama dengan ordo matriks C, maka $A \neq C$. Ordo matriks B sama dengan ordo matriks D dan elemen-elemen yang seletak dari kedua matriks ini juga sama, maka $B = D$.

□

Contoh 2.2.2

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & b \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ c & 3c \end{pmatrix}$. Jika $A = B$, tentukan nilai-nilai dari a, b, dan c.

Penyelesaian:

Dari $A = B$ diperoleh hubungan:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ c & 3c \end{pmatrix}$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua buah matriks, diperoleh:

$a = 2b$, $\qquad -1 = c$, $\qquad b = 3c$

Dari persamaan-persamaan ini, diperoleh:

$c = -1$, $\quad b = 3c = 3(-1) = -3$, $\quad$ dan $\quad a = 2b = 2(-3) = -6$

□

Contoh 2.2.3

Diketahui matriks $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dan $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jika $A = B$, tentukan nilai α.

Penyelesaian:
Karena $A = B$, maka cos $\alpha = 1$ dan sin $\alpha = 0$. Dari hubungan cos $\alpha = 1$, diperoleh nilai $\alpha = 0 + 2k\pi$. Dari hubungan sin $\alpha = 0$, diperoleh $\alpha = 0 + k\pi$. Jadi, $\alpha = 0 + 2k\pi$.

□

Latihan 2.2

1. Diketahui ordo matriks A adalah $m \times n$ dan ordo matriks B adalah $p \times q$. Jika $A = B$, apa yang Anda ketahui tentang hubungan antara m, n, p, dan q?
2. Jika ordo dari matriks A sama dengan ordo matriks B, apakah $A = B$? Jika jawaban Anda ya, jelaskan, tetapi jika tidak berikan contohnya.
3. Jika matriks A sama dengan matriks B, apakah ordo matriks A sama dengan ordo matrik B? Berikan penjelasan.
4. Jika matriks A dan matriks B mempunyai ordo $m \times n$ dan $A = B$, apa yang Anda ketahui tentang hubungan antara m dan n?
5. Tentukan nilai x dan y sedemikian hingga $\begin{pmatrix} 2x-3y \\ 4x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \end{pmatrix}$.
6. Tentukan nilai x dan y sedemikian hingga $\begin{pmatrix} 3x+4y & 2 \\ 5 & x-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$.
7. Apakah ada nilai x dan y sedemikian hingga $\begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 1 & x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?
8. Diketahui matriks $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dan $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Jika $A = B$, tentukan nilai α.

2.3 Jenis-Jenis Matriks

Berikut ini diberikan jenis-jenis matriks yang mempunyai sifat-sifat khusus.

a. Matriks Persegi

Jika suatu matriks mempunyai banyak baris sama dengan banyak kolom, maka matriks demikian disebut matriks persegi. Jika banyaknya baris pada matriks persegi adalah n, maka matriks tersebut disebut matriks persegi ordo $n \times n$ atau sering disebut matriks persegi ordo n.

Berikut ini diberikan beberapa contoh matriks persegi.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ matriks persegi ordo 2

$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ matriks persegi ordo 3

b. Matriks Diagonal

Jika diberikan matriks persegi

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

maka elemen-elemen $a, f, k,$ dan p disebut elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama matriks A. Sebuah matriks persegi dinamakan matriks diagonal, jika semua elemen di luar diagonal utama adalah nol. Berikut ini diberikan beberapa contoh matriks diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Suatu matriks disebut matriks segitiga atas, jika semua elemen di bawah elemen diagonal utama adalah nol. Berikut ini beberapa contoh matriks segitiga atas.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Suatu matriks disebut matriks segitiga bawah, jika semua elemen di atas elemen diagonal utama adalah nol. Berikut ini beberapa contoh matriks segitiga bawah.

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

c. Matriks Identitas

Sebuah matriks diagonal dinamakan matriks identitas atau matriks satuan, jika setiap elemen pada diagonal utama dari matriks diagonal tersebut adalah 1. Matriks identitas sering dilambangkan dengan I_n, dengan n melambangkan ordo dari matriks identitas tersebut. Matriks identitas juga sering dinotasikan dengan I saja.

Berikut ini diberikan contoh matriks identitas.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Matriks Nol

Sebuah matriks dikatakan matriks nol jika setiap elemen dari matriks tersebut adalah nol. Matriks nol sering dituliskan dengan O. Berikut ini diberikan beberapa contoh matriks nol.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dan } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e. Matriks Baris

Sebuah matriks yang hanya mempunyai satu baris disebut matriks baris. Berikut ini beberapa contoh matriks baris.

$(1\ \ 2\ \ 3)$, $(-1\ \ 4\ \ 7\ \ 8)$, dan $(9\ \ 0\ \ 8\ \ -5\ \ 7\ \ 6\ \ 4)$

f. Matriks Kolom

Sebuah matriks yang hanya mempunyai satu kolom disebut matriks kolom. Berikut ini beberapa contoh matriks kolom.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dan } \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Latihan 2.3

1. Apakah matriks nol selalu merupakan matriks persegi?
2. Apakah matriks identitas selalu merupakan matriks persegi?
3. Apakah matriks diagonal selalu matriks persegi?
4. Apakah matriks nol merupakan matriks diagonal?
5. Apakah matriks identitas merupakan matriks diagonal?
6. Apakah matriks nol persegi merupakan matriks diagonal?

7. Berikan contoh matriks nol yang juga merupakan matriks baris?
8. Berikan sebuah contoh matriks nol yang juga matriks kolom.
9. Adakah matriks yang sekaligus merupakan matriks baris dan juga matriks kolom?
10. Apakah matriks identitas merupakan matriks segitiga atas?
11. Apakah matriks identitas merupakan matriks segitiga bawah?
12. Apakah ada matriks yang merupakan matriks segitiga atas sekaligus juga merupakan matriks segitiga bawah?
13. Apakah matriks nol yang persegi juga merupakan matriks segitiga atas?

2.4 Transpose Matriks

Transpose matriks A, ditulis dengan A^t, adalah matriks yang elemen-elemennya diperoleh dari elemen-elemen matriks A dengan mengubah setiap elemen baris ke-n dari matriks A menjadi elemen kolom ke-n dari matriks A^t dan setiap elemen kolom ke-m matriks A menjadi elemen baris ke-m dari matriks A^t. Jika A merupakan matriks persegi ordo n, maka matriks A^t juga matriks persegi ordo n, tetapi jika A matriks berordo $m \times n$, maka matriks A^t merupakan matriks berordo $n \times m$. Berikut ini diberikan cara menentukan transpose suatu matriks.

Contoh 2.4.1

Jika diberikan matriks-matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{dan} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

maka transpose dari matriks-matriks tersebut adalah:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{dan} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Dengan memperhatikan definisi transpose matriks di atas, dapat disimpulkan bahwa transpose matriks mempunyai sifat $(A^t)^t = A$. Selanjutnya, sebuah matriks yang mempunyai sifat $A^t = A$ disebut matriks simetris, sedangkan sebuah matriks yang mempunyai sifat $A^t = -A$ disebut matriks skew-simetris, dengan $-A$ adalah matriks yang entri-entrinya adalah negatif dari entri-entri matriks A.

Latihan 2.4

1. Tentukan transpose dari matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = (-1 \;\; 4 \;\; 7 \;\; 8),$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Berikan beberapa contoh matriks yang menunjukkan bahwa $(A^t)^t = A$.
3. Berikan beberapa contoh matriks simetris.
4. Berikan beberapa contoh matriks skew-simetris.
5. Apakah matriks identitas merupakan matriks simetris?
6. Apakah matriks nol yang persegi merupakan matriks simetris?
7. Apakah $(-A^t) = (-A)^t$? Berikan beberapa contoh.
8. Apakah matriks simetris harus merupakan matriks persegi?
9. Apakah matriks skew-simetris harus merupakan matriks persegi?
10. Adakah matriks simetris yang sekaligus matriks skew-simetris? Jika ada berikan contohnya.

2.5 Operasi Aljabar Dua Matriks

Untuk mengoptimalkan peranan matriks dalam berbagai persoalan, dalam subbab ini akan dibahas "ilmu hitung matriks" yang meliputi penjumlahan dua matriks, pengurangan dua matriks, perkalian skalar dengan matriks, dan perkalian dua matriks.

2.5.1 Penjumlahan dan Pengurangan Dua Matriks

Berikut ini diberikan daftar penerimaan tiga barang dagangan dari sebuah toko bahan kebutuhan pokok yang diperoleh dari tiga orang penyalur (penyalur Amir, Budi, dan Siti) pada bulan Januari dan bulan Februari.

Daftar Penerimaan Barang Bulan Januari

Nama Barang	Penyalur		
	Amir	Budi	Siti
Beras	100	150	125
Gula	50	75	60
Minyak	75	50	80

Daftar Penerimaan Barang Bulan Februari

Nama Barang	Penyalur		
	Amir	Budi	Siti
Beras	75	100	100
Gula	75	50	150
Minyak	100	80	75

Dari dua daftar penerimaan barang tersebut, pemilik toko membuat daftar penerimaan barang total dua bulan dari tiga penyalur tersebut, sehingga diperoleh daftar penerimaan barang sebagai berikut.

Daftar Penerimaan Barang Bulan Januari dan Februari

Nama Barang	Penyalur		
	Amir	Budi	Siti
Beras	175	250	225
Gula	125	125	210
Minyak	175	130	155

Perhatikan bahwa tabel ketiga diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen pada sel yang seletak dari tabel pertama dan tabel kedua. Dari persoalan tersebut muncul ide untuk menjumlahkan dua buah matriks. Berikut ini diberikan definisi penjumlahan dua buah matriks yang mempunyai ordo sama. Untuk dua matriks yang mempunyai ordo berbeda tidak dapat dijumlahkan.

Definisi 2.2

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang mempunyai ordo sama, maka jumlah dua matriks $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama elemen-elemen yang bersesuaian dari kedua matriks tersebut.

Contoh 2.5.1

Jika diketahui matriks-matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix},\ \text{dan } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

maka

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 0+4 & -7+3 \\ 2+0 & -3+7 & 4+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

sedangkan $A + C$ dan $B + C$ tidak dapat dijumlahkan atau tidak didefinisikan karena matriks A dan C serta matriks B dan C tidak mempunyai ordo yang sama.

Jika B merupakan sebarang matriks, maka $-B$ adalah matriks yang elemen-elemennya adalah negatif dari elemen-elemen matriks B yang seletak, sebagai contoh jika

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

maka

$$-B = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Definisi 2.3

Jika A dan B adalah sembarang dua matriks yang mempunyai ordo sama, maka selisih dua buah matriks, $A - B$ adalah matriks yang merupakan jumlah dari matriks A dan $(-B)$ atau $A - B = A + (-B)$.

Contoh 2.5.2

Jika diketahui matriks-matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

maka

$$
\begin{aligned}
A - B &= A + (-B) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 & -4 & -10 \\ 2 & -10 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa $A - B$ dapat diperoleh secara langsung dengan mengurangkan elemen-elemen B dari elemen-elemen A yang seletak.

Berikut ini diberikan sifat-sifat operasi penjumlahan dua buah matriks.

Teorema 2.1

Jika A, B, dan C merupakan matriks-matriks dengan ordo yang sama, maka berlaku:

a. $A + B = B + A$ (sifat komutatif terhadap penjumlahan)

b. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (sifat asosiatif terhadap penjumlahan)

c. Terdapat matriks nol O, sehingga:

$$A + O = O + A = A$$

d. Terdapat matriks $(-A)$, sehingga:

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

Berikut ini diberikan contoh untuk memberikan gambaran dari teorema di atas.

Contoh 2.5.3

Jika diberikan matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

maka

$$
\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

sedangkan

$$
\begin{aligned}
B + A &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Dari contoh ini jelas bahwa $A + B = B + A$.

□

Para siswa diharapkan dapat menunjukkan sifat-sifat yang lain dengan memberikan contoh-contoh.

Latihan 2.5.1

1. Perusahaan "Adi Prabowo" mempunyai dua anak cabang perusahaan, yaitu "Adi Prabowo I" dan "Adi Prabowo II", masing-masing mempunyai produk mesin jenis *S*, *T*, dan *U*. Banyaknya produksi pada bulan Januari, Februari, dan Maret disajikan dalam tabel berikut.

Bulan	Adi Prabowo I			Adi Prabowo II			Adi Prabowo		
	S	*T*	*U*	*S*	*T*	*U*	*S*	*T*	*U*
Januari	200	150	175	250	100	50	450	250	225
Februari	100	75	125	100	100	75	200	175	200
Maret	150	125	100	125	150	125	275	275	225

   a. Nyatakan data banyaknya produksi anak cabang perusahaan "Adi Prabowo I" sebagai matriks *A*.
   b. Nyatakan data banyaknya produksi anak cabang perusahaan "Adi Prabowo II" sebagai matriks *B*.
   c. Berapa ordo matriks A dan berapa ordo matriks *B*?
   d. Nyatakan data-data pada tabel di atas sebagai penjumlahan matriks.

2. Berikan sebuah contoh penyajian data yang ada di sekitar Anda, yang menunjukkan adanya operasi penjumlahan matriks.

3. Diberikan matriks:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 8 & 9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}-2 & 10 & 6\\ 8 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

   Tentukan matriks-matriks berikut jika mungkin, dan berikan alasan jika tidak mungkin.

   a. $A+B$
   b. $A+C$
   c. $B+C$
   d. $B+A$
   e. $A+E$
   f. $D+E$
   g. $(-A)$
   h. $(-B)$
   i. $A-B$
   j. $B-C$
   k. $A-C$
   l. $D-E$
   m. $C-A$
   n. $E-D$
   o. $D-A$
   p. $E+(-E)$
   q. $(A+B)+C$
   r. $A+(B+C)$
   s. $(A+C)+B$
   t. $A+(C+B)$

4. Diberikan matriks-matriks:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks-matriks berikut.

a. $(-P)$
b. $P + (-P)$
c. $(-P) + P$
d. $P + O$
e. $O + P$
f. $O - P$
g. $P - O$

5. Tentukan nilai x, y, dan z jika diketahui:

$$\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 5 \\ x & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Tentukan nilai a, b, dan c jika diketahui:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ c & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Apakah terdapat nilai a, b, dan c yang memenuhi persamaan berikut.

$$\begin{pmatrix} a+c & a+b & a-c \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Tentukan matriks A dan matriks B sedemikian hingga berlaku:

a. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} - B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

9. Jika diketahui matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

maka perlihatkan bahwa:

a. $(A + B)^t = A^t + B^t$
b. $(A - B)^t = A^t - B^t$

10. a. Buktikan bahwa jika A matriks simetrik ($A^t = A$), maka matriks ($A + A^t$) juga matriks simetrik.

b. Buktikan bahwa jika B matriks skew-simetrik ($A^t = -A$), maka matriks ($B - B^t$) juga skew-simetrik.

2.5.2 Perkalian Skalar dengan Matriks

Jika c suatu skalar yang merupakan elemen dari bilangan real dan A suatu matriks, maka kita dapat melakukan operasi perkalian cA yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4

Jika A suatu matriks dan c suatu skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen dari A dengan c.

Contoh 2.5.4

Jika diberikan matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

maka

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -14 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad -3A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 21 \\ -6 & 9 & -12 \end{pmatrix}$$

□

Berikut ini diberikan beberapa sifat perkalian skalar dengan matriks.

Teorema 2.2

Dengan menganggap bahwa operasi-operasi penjumlahan berikut terdefinisi, maka aturan-aturan perkalian skalar berikut berlaku.

a. $(km)A = k(mA)$ (k dan m sebarang skalar)
b. $(k+m)A = kA + mA$ (k dan m sebarang skalar)
c. $k(A+B) = kA + kB$ (k sebarang skalar)
d. $1A = A$
e. $0A = O$ (O matriks nol)

Latihan 2.5.2

1. Diketahui matriks-matriks:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}6 & 4 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & -7\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\\ 0 & -4\end{pmatrix}$$

Tentukan matriks-matriks berikut jika mungkin dan berikan penjelasan jika tidak mungkin.

a. $5A$
b. $2C$
c. $-3D$
d. $-5F$
e. $4A+3B$
f. $5B+2C$
g. $6C+2D$
h. $3E+F$
i. $2A-3B$
j. $7C-4D$
k. $0F$
l. $5(2A)$
m. $10A$
n. $3(A+B)$
o. $3A+3B$
p. $2(C-D)$
q. $(4+5)F$
r. $9F$
s. $1E$

2. Diketahui matriks-matriks:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

dan skalar: $a=2,\ b=-3$.

Dengan menghitung matriks-matriks berikut, tunjukkan bahwa:

a. $(a+b)C=aC+bC$
b. $(a-b)C=aC-bC$
c. $a(B+C)=aB+aC$
d. $a(bC)=(ab)C$
e. $1A=A$
f. $0A=O$

3. Tentukan nilai x, y, dan z jika persamaan matriks berikut benar.

$$3\begin{pmatrix}2 & x\\ y & -1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}z & 5\\ x & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y & 2\\ 1 & -11\end{pmatrix}$$

4. Diberikan matriks:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 8 & 9\end{pmatrix}\quad \text{dan}\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

Perlihatkan bahwa:

a. $(5A)^t=5A^t$
b. $(3A-2B)^t=3A^t-2B^t$

5. Jika diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$$

serta m dan n merupakan sebarang skalar, tunjukkan bahwa:
a. $(mA)^t = mA^t$
b. $(mA + nB)^t = mA^t + nB^t$

2.5.3 Perkalian Dua Matriks

Di dalam subbab sebelumnya telah didefinisikan perkalian antara skalar dengan matriks. Pertanyaan berikutnya adalah bagaimana definisi perkalian antara dua buah matriks? Dengan memperhatikan definisi penjumlahan dua buah matriks, maka cukup beralasan jika ada orang yang memikirkan bahwa perkalian dua buah matriks didefinisikan sebagai perkalian entri-entri yang seletak. Tetapi, definisi ini ternyata tidak begitu berguna untuk berbagai masalah. Berikut ini diberikan gambaran yang dapat memotivasi pendefinisian perkalian dua buah matriks. Perhatikan dua buah daftar berikut. Daftar pertama menunjukkan daftar pembelian gula yang dilakukan oleh ibu Ani dan ibu Yuli dalam bulan Januari dan bulan Februari. Daftar kedua menunjukkan harga gula per kg dalam bulan Januari dan Februari.

Daftar Pertama

	Januari	Februari
Ibu Ani	30 kg	20 kg
Ibu Yuli	50 kg	40 kg

Daftar Kedua

	Harga
Januari	Rp4.500,00
Februari	Rp4.000,00

Dari daftar di atas, diperoleh informasi bahwa:
1. Uang yang dikeluarkan ibu Ani adalah:
   $30 \times \text{Rp}4.500{,}00 + 20 \times \text{Rp}4.000{,}00 = \text{Rp}215.000{,}00$
2. Uang yang dikeluarkan ibu Yuli adalah
   $50 \times \text{Rp}4.500{,}00 + 40 \times \text{Rp}4.000{,}00 = \text{Rp}385.000{,}00$

Jika permasalahan tersebut disajikan dalam bentuk matriks, diperoleh bentuk sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 50 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.500 \\ 4.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \times 4.500 + 20 \times 4.000 \\ 50 \times 4.500 + 40 \times 4.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 215.000 \\ 385.000 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa setiap elemen baris ke-n (baris ke-1 atau baris ke-2) dari matriks pertama dikalikan dengan elemen-elemen pada kolom matriks kedua, kemudian dijumlahkan untuk mendapatkan matriks yang baru.

Dengan memperhatikan permasalahan tersebut, para matematikawan mendefinisikan perkalian matriks sebagai berikut.

Definisi 2.5

Jika A adalah matriks berordo $m \times r$ dan B adalah matriks berordo $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks berordo $m \times n$ yang elemen-elemennya ditentukan sebagai berikut. Elemen dalam baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks AB diperoleh dengan menjumlahkan hasil kali elemen-elemen baris ke-i dari matriks A dengan elemen-elemen kolom ke-j matriks B.

Untuk memperjelas definisi di atas, berikut diberikan contoh perkalian dua buah matriks.

Contoh 2.5.5

Diberikan dua buah matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Karena A merupakan matriks berordo 2×3 dan B matriks berordo 3×1, maka matriks hasil kali AB adalah matriks berordo 2×1. Untuk menentukan elemen dalam baris pertama dan kolom pertama dari AB, kita dapat mengalikan elemen-elemen baris pertama dari matriks A dengan elemen-elemen kolom pertama matriks B, sehingga diperoleh

$$1(2) + 0(1) + (-7)(4) = 2 + 0 - 28 = -26$$

Untuk menentukan elemen dalam baris kedua dan kolom pertama dari AB, kita dapat mengalikan elemen-elemen baris kedua dari matriks A dengan elemen-elemen kolom pertama matriks B, sehingga diperoleh:

$$2(2) + (-3)(1) + 4(4) = 4 - 3 + 16 = 17$$

Jadi, matriks hasil kali AB adalah

$$AB = \begin{pmatrix} -26 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Karena matriks B mempunyai ordo 3×1 dan matriks A mempunyai ordo 2×3, berdasarkan definisi di atas, maka perkalian matriks BA tidak terdefinisi.

Contoh 2.5.6

Diberikan dua buah matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Karena A merupakan matriks berordo 3×2 dan B matriks berordo 2×4, maka AB merupakan matriks berordo 3×4. Elemen-elemen dari matriks AB dapat ditentukan sebagai berikut.

- Elemen baris pertama dan kolom pertama adalah:
  $$1(2) + (-3)(1) = 2 - 3 = -1$$
- Elemen baris pertama dan kolom kedua adalah:
  $$1(0) + (-3)(-3) = 0 + 9 = 9$$
- Elemen baris pertama dan kolom ketiga adalah:
  $$1(7) + (-3)(2) = 7 - 6 = 1$$

- Elemen baris pertama dan kolom keempat adalah:
$$1(4) + (-3)(0) = 4 + 0 = 4$$
- Elemen baris kedua dan kolom pertama adalah:
$$2(2) + 5(1) = 4 + 5 = 9$$
- Elemen baris kedua dan kolom kedua adalah:
$$2(0) + 5(-3) = 0 - 15 = -15$$
- Elemen baris kedua dan kolom ketiga adalah:
$$2(7) + 5(2) = 14 + 10 = 24$$
- Elemen baris kedua dan kolom keempat adalah:
$$2(4) + 5(0) = 8 + 0 = 8$$
- Elemen baris ketiga dan kolom pertama adalah:
$$0(2) + (-1)(1) = 0 - 1 = -1$$
- Elemen baris ketiga dan kolom kedua adalah:
$$0(0) + (-1)(-3) = 0 + 3 = 3$$
- Elemen baris ketiga dan kolom ketiga adalah:
$$0(7) + (-1)(2) = 0 - 2 = -2$$
- Elemen baris ketiga dan kolom keempat adalah:
$$0(4) + (-1)(0) = 0 + 0 = 0$$

Jadi, matriks AB adalah:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 1 & 4 \\ 9 & -15 & 24 & 8 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan alasan yang sama dengan contoh sebelumnya, maka perkalian matriks BA tidak terdefinisikan.

Contoh 2.5.7

Diketahui matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks AB dan matriks BA.

Penyelesaian:

Karena matriks A berordo 2×3 dan matriks B berordo 3×2 maka matriks AB berordo 2×2, sedangkan matriks BA berordo 3×3.

Dengan perhitungan seperti contoh sebelumnya, diperoleh:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+0+0 & 10+0-12 \\ 3+4+0 & 5+8-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$$

dan

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+5 & 0+20 & 9+25 \\ 2+2 & 0+8 & 3+10 \\ 0-4 & 0-16 & 0-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 20 & 34 \\ 4 & 8 & 13 \\ -4 & -16 & -20 \end{pmatrix}$$

Tampak bahwa AB tidak sama dengan BA.

□

Contoh 2.5.8

Diketahui $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ dan $B=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. Tentukan matriks AB.

Penyelesaian:

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\ 5x+3y\end{pmatrix}$$

□

Catatan:

1. Definisi perkalian matriks A dan B menyaratkan bahwa banyaknya kolom matrik A harus sama dengan banyaknya baris matriks B, untuk mendapatkan matriks AB.
$$A_{m\times r}\, B_{r\times n}=AB_{m\times n}$$
Jika syarat tersebut tidak dipenuhi, maka operasi perkalian tersebut tidak terdefinisi.

2. Tidak seperti perkalian pada bilangan real yang berlaku sifat komutatif, perkalian matriks tidak bersifat komutatif, yaitu untuk sebarang matriks A dan B, AB tidak selalu sama dengan BA. Terdapat tiga kemungkinan matriks AB tidak sama dengan matriks BA.
   - Kemungkinan I. Matriks AB terdefinisi, sedangkan matriks BA tidak terdefinisi, sebagai contoh jika matriks A berukuran 3×2 dan B berukuran 2×4, maka matriks AB berukuran 3×4 sedangkan matriks BA tidak terdefinisi.
   - Kemungkinan II. Matriks AB dan matriks BA terdefinisi, tetapi mempunyai ukuran (ordo) yang berbeda, sebagai contoh jika matriks A berukuran 3×2 dan B berukuran 2×3, maka matriks AB berukuran 3×3 sedangkan matriks BA berukuran 2×2.
   - Kemungkinan III. Matriks AB dan matriks BA terdefinisi dan mempunyai ukuran (ordo) yang sama, tetapi elemen-elemen dari matriks AB dan BA berbeda. Berikut ini sebuah contoh yang menggambarkan hal ini.
   Diberikan matriks A dan B:
   $$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$
   Dengan mengalikan kedua matriks tersebut, diperoleh:
   $$AB=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 11 & 4\end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad BA=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$
   Jadi, $AB\neq BA$.

Berikut ini diberikan sifat-sifat perkalian dua buah matriks.

Teorema 2.3

Dengan menganggap bahwa operasi-operasi perkalian berikut terdefinisi, maka aturan-aturan perkalian matriks berikut berlaku.

a. $k(AB) = (kA)B$ (k sebarang skalar)
b. $A(BC) = (AB)C$ (sifat asosiatif terhadap perkalian)
c. $A(B + C) = AB + AC$ (sifat distributif kanan)
d. $(B + C)A = BA + CA$ (sifat distributif kiri)
e. $AI = IA = A$ (I matriks identitas)
f. $AO = OA = O$ (O matriks nol)

Para siswa diharapkan mencoba membuktikan beberapa sifat di atas dengan memberikan contoh beberapa matriks yang berbeda-beda.

Latihan 2.5.3

1. Diketahui matriks:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tentukan:

a. baris pertama matriks AB
b. baris pertama matriks BA
c. baris ketiga matriks AB
d. baris ketiga matriks BA
e. kolom kedua matriks AB
f. kolom kedua matriks BA
g. baris ketiga matriks AA
h. kolom ketiga matriks BB

2. Diketahui matriks-matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks-matriks berikut jika mungkin dan berikan penjelasan jika tidak mungkin.

a. AB
b. BA
c. AC
d. CA
e. A^2
f. CD
g. EF
h. FE

i. $A(BC)$
j. $(AB)C$
k. $(A+B)C$
l. $AC+BC$
m. $5(AB)$
n. $(5A)B$
o. $A(D+E)$
p. $AD+AE$

3. Diketahui matriks-matriks:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 5\end{pmatrix},\qquad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Tentukan matriks-matriks berikut.
a. AI
b. IA
c. AO
d. OA

4. Carilah matriks A, B, dan C sedemikian hingga persamaan matriks berikut benar.

a. $3\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}+A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

b. $2\begin{pmatrix}1 & 0 & -7\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}-3B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

c. $5C+3\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix}$

5. Diketahui matriks-matriks:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\qquad \text{dan}\qquad C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

a. Tentukan matriks AB.
b. Jika $AB=C$, nyatakan persamaan matriks tersebut sebagai sistem persamaan linear.

6. Nyatakan sistem persamaan linear berikut sebagai persamaan matriks.

a. $\begin{cases}2x+3y=8\\ x-5y=10\end{cases}$

b. $\begin{cases}x+5y=-2\\ 2x-5y=6\end{cases}$

c. $\begin{cases}2x+3y-z=5\\ x-2y+5z=8\\ 3x+4y-5z=10\end{cases}$

7. Diberikan matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Perlihatkan bahwa:

a. $(AB)^t = B^t A^t$

b. $(BA)^t = A^t B^t$

8. Buktikan bahwa jika B merupakan matriks simetrik ($B^t = B$), maka BB^t juga merupakan matriks simetrik.

2.5.4 Perpangkatan Matriks

Seperti halnya di dalam operasi bilangan, di dalam matriks pun kita juga mengenal operasi perpangkatan. Karena perpangkatan merupakan operasi perkalian yang diulang-ulang, maka untuk melakukan perpangkatan syarat yang ada di dalam perkalian matriks harus dipenuhi pada operasi perpangkatan, yaitu banyaknya kolom matriks pertama harus sama dengan banyaknya baris matriks kedua. Di dalam perpangkatan, matriks pertama sama dengan matriks kedua, sehingga untuk melakukan perpangkatan harus dipenuhi bahwa banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Ini berarti, untuk melakukan operasi perpangkatan, matriknya harus merupakan matriks persegi.

Untuk matriks persegi A, perpangkatan matriks A didefinisikan sebagai berikut:

$$A^n = \underbrace{AAA \cdots A}_{n \text{faktor}}$$

Untuk $n = 0$, didefinisikan $A^0 = I$, dengan I adalah matriks identitas.

Contoh 2.5.9

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Tentukan A^2.

b. Jika $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$, tentukan $f(A)$.

Penyelesaian:

a. $A^2 = AA$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

b. $f(A) = 3A^2 + 5A - 2I$

$$= 3\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & 6 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 16 \\ 24 & 16 \end{pmatrix}$$

□

Catatan:

Dalam hal ini digunakan aturan bahwa jika $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a,b,c bilangan real, maka untuk sebarang matriks persegi A berlaku:

$$f(A) = aA^2 + bA^2 + cI,$$

dengan I matriks identitas dengan ordo sama dengan ordo dari A.

Latihan 2.5.4

1. Diketahui matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hitunglah:

a. A^2

b. A^3

c. $A^2 + 2A + I$

2. Diketahui matriks:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hitunglah:

a. B^2

b. B^3

c. $f(B)$, jika $f(x) = x^2 + 2x + 3$

d. $g(B)$, jika $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

3. Jika diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tentukan nilai m dan n sedemikian hingga berlaku $A^2 = mA + nI$.

4. Buktikan bahwa jika

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dan n sebarang bilangan nonnegatif, maka berlaku $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Jika A merupakan matriks persegi dan n bilangan bulat nonnegatif, apakah benar bahwa $(A^n)^t = (A^t)^n$? Apakah pernyataan tersebut juga benar untuk matriks A yang bukan matriks persegi?

2.6 Determinan Matriks

Kita semua sudah cukup mengenal fungsi $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 5x + 6$, dan lain-lain, yaitu suatu fungsi yang mengawankan bilangan real x dengan bilangan real $f(x)$. Fungsi demikian disebut fungsi bernilai real dari sebuah variabel real. Di dalam subbab ini, kita akan mengkaji fungsi bernilai real dari sebuah variabel matriks. Ini berarti bahwa daerah asal (*domain*) fungsinya adalah himpunan semua matriks persegi dan daerah kawan (*kodomain)* fungsinya adalah himpunan bilangan real. Fungsi ini selanjutnya akan disebut *determinan.*

Berikut ini diberikan definisi determinan matriks persegi ordo 2×2.

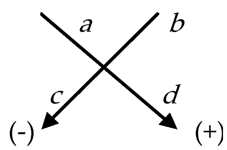
Definisi 2.6

Jika A merupakan matriks persegi ordo 2×2, misalkan:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

maka yang dimaksud dengan determinan dari A adalah bilangan real yang didefinisikan dengan $\det(A) = ad - bc$.

Untuk memudahkan mengingat rumus determinan matriks ordo 2×2, perhatikan bentuk berikut.



Rumus determinan matriks A, $\det(A)$ diperoleh dengan mengalikan elemen-elemen pada panah yang mengarah ke kanan dan mengurangkan hasil kali elemen-elemen pada panah yang mengarah ke kiri.

Determinan matriks A sering dituliskan dengan $\det(A)$ atau $|A|$. Jika $\det(A) = 0$, maka matriks A disebut matriks singular, dan jika $\det(A) \neq 0$, maka matriks A disebut matriks nonsingular.

Untuk memahami definisi determinan, berikut ini diberikan beberapa contoh menghitung nilai determinan suatu matriks.

Contoh 2.6.1

Tentukan determinan dari matriks-matriks berikut.

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 4 & k-3 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

a. $\det(A) = (3)\cdot(-2) - (1)\cdot(4) = -6 - 4 = -10.$
b. $\det(B) = (k-1)(k-3) - (2)(4) = k^2 - 4k + 3 - 8 = k^2 - 4k - 5.$
c. $\det(C) = (7)(0) - (5)(0) = 0 - 0 = 0.$

□

Contoh 2.6.2

Tentukan semua nilai k sedemikian hingga $\det(A) = 0$, jika $A = \begin{pmatrix} k-1 & -2 \\ 1 & k-4 \end{pmatrix}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\det(A) = 0 &\Leftrightarrow (k-1)(k-4) - (-2)(1) = 0 \\
&\Leftrightarrow k^2 - 5k + 4 + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow (k-3)(k-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow k - 3 = 0 \text{ atau } k - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow k = 3 \text{ atau } k = 2
\end{aligned}$$

□

Sekarang kita berikan definisi determinan matriks persegi berordo 3×3.

Definisi 2.7

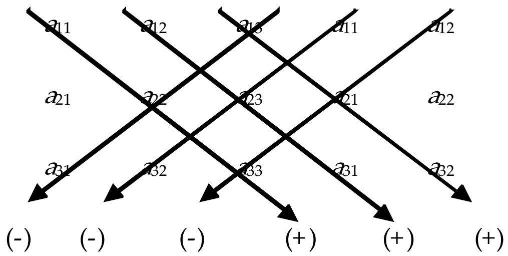
Jika A merupakan matriks persegi ordo 3×3, misalkan:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

maka yang dimaksud dengan determinan dari A, ditulis dengan $\det(A)$, adalah bilangan real yang didefinisikan dengan:

$$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}.$$

Untuk memudahkan mengingat rumus determinan matriks ordo 3×3, perhatikan bentuk berikut.



Langkah pertama kita menyalin kolom pertama dan kolom kedua, dan diletakkan pada sisi sebelah kanan dari matriks seperti tampak pada gambar di atas. Langkah kedua menjumlahkan hasil kali elemen-elemen pada panah yang mengarah ke kanan dan mengurangkan hasil kali elemen-elemen pada panah-panah yang mengarah ke kiri. Hasil tersebut adalah determinan yang dimaksud.

Contoh 2.6.3

Tentukan determinan matriks-matriks berikut.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

a. $\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{array}\right.$

$= (1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(-4)(-8) - (3)(5)(7) - (1)(6)(-8) - (2)(-4)(9)$
$= 45 + 84 + 96 - 105 + 48 + 72$
$= 240$

b. $\det(B) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 3 & 0 \end{array}\right.$

$= (1)(0)(9) + (0)(5)(3) + (3)(4)(0) - (3)(0)(3) - (1)(5)(0) - (0)(4)(9)$
$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$
$= 0$

□

Latihan 2.6

1. Hitunglah determinan dari matriks-matriks ordo 2×2 berikut ini.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$

d. $D = \begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 4 & k-3 \end{pmatrix}$

e. $E = \begin{pmatrix} k-2 & -4 \\ -6 & k+5 \end{pmatrix}$

2. Tentukan nilai k sedemikian hingga $\det(A) = 0$, jika:

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & -2 \\ 8 & k-5 \end{pmatrix}$$

3. Tentukan nilai k sedemikian hingga det(A) = 5, jika:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 4 & k-3 \end{pmatrix}$$

4. Hitunglah determinan matriks ordo 3×3 berikut ini.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} k-4 & 0 & 1 \\ 2 & k+2 & -1 \\ 3 & 4 & k-5 \end{pmatrix}$

5. Tentukan nilai k sedemikian hingga $\det(A) = 0$, jika:

$$A = \begin{pmatrix} k-6 & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 4 & k-2 \end{pmatrix}$$

6. Buktikan bahwa jika matriks A berordo 2×2 mempunyai baris yang elemen-elemennya bilangan nol, maka $\det(A) = 0$.

7. Buktikan bahwa jika matriks A berordo 3×3 mempunyai kolom yang elemen-elemennya bilangan nol, maka $\det(A) = 0$.

8. Buktikan bahwa jika matriks A berordo 2×2 mempunyai baris kedua yang elemen-elemennya dua kali baris pertama, maka $\det(A) = 0$.

9. Dengan memberikan contoh, tunjukkan bahwa $\det(A) = \det(A^t)$.

10. Dengan memberikan contoh, tunjukkan bahwa jika matriks A berordo 2×2, maka $\det(kA) = k^2 \det(A)$.

2.7 Invers Matriks

Dalam teori bilangan, kita mengenal bahwa kebalikan (invers) bilangan 2 terhadap perkalian yaitu bilangan $\frac{1}{2}$, sebab $(2)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Demikian juga kebalikan (invers) bilangan $\frac{3}{5}$ adalah $\frac{5}{3}$ sebab $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = 1$. Sekarang kita akan memperhatikan invers dari suatu matriks persegi.

Definisi 2.8

Matriks A disebut invers matriks B, jika berlaku $AB = BA = I$, dengan I merupakan matriks identitas.

Catatan:

1. Invers matriks B dituliskan dengan B^{1}.
2. Jika A merupakan invers matriks B, maka dituliskan bahwa $B^{1} = A$.
3. Jika A invers matriks B, maka B juga merupakan invers matriks A.
4. Pembahasan invers matriks hanya dibatasi pada matriks persegi, tidak ada definisi invers matriks yang tidak persegi.

Contoh 2.7.1

Jika diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

tunjukkan bahwa A merupakan invers matriks B.

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa $AB = BA = I$.
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6-5 & -3+3 \\ 10-10 & -5+6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6-5 & 2-2 \\ -15+15 & -5+6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, terbukti bahwa $AB = BA = I$. Ini berarti bahwa A merupakan invers matriks B dan sebaliknya B merupakan invers matriks A.

□

Pertanyaan berikutnya, bagaimana menentukan invers suatu matriks persegi? Berikut ini diberikan teorema yang dapat digunakan untuk menentukan invers suatu matriks berordo 2×2.

Teorema 2.4

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, asalkan $ad - bc \neq 0$.

B u k t i:

Akan ditunjukkan bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
Perhatikan bahwa:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -bc+da \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dan

$$A^{-1}A = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, maka terbuktilah bahwa A^{-1} merupakan invers dari matriks A.

□

Catatan:

1. Ingat kembali bahwa bilangan "$ad - bc$" adalah determinan matriks A, atau $\det(A) = ad - bc$, jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
2. Dari Teorema 2.4, jika A merupakan matriks nonsingular atau $\det(A) \neq 0$, maka invers matriks A ada, tetapi jika matriks A merupakan matriks singular atau $\det(A) = 0$, maka invers matriks A tidak ada.

Contoh 2.7.2

Tentukan invers matriks-matriks berikut (jika ada).

a. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

a. Karena $\det(A) = (5)(3) - (2)(7) = 15 - 14 = 1 \neq 0$, maka invers matriks A ada. Dengan menggunakan rumus untuk mencari invers, diperoleh:

$$A^{-1} = \frac{1}{15-14}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

b. Karena $\det(B) = (3)(-2) - (-1)(6) = -6 + 6 = 0$, maka matriks A tidak mempunyai invers.

c. Karena untuk sebarang sudut α, berlaku $\det(C) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \neq 0$, maka invers matriks C ada. Dengan menggunakan rumus untuk mencari invers, diperoleh:

$$C^{1} = \frac{1}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

□

Contoh 2.7.3

Tentukan matriks A dan matriks B yang memenuhi persamaan matriks berikut.

a. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

b. $B\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

a. Perhatikan persamaan matriks:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{(i)}$$

Jika dimisalkan $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, maka $P^{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Akibatnya, jika persamaan (i) dikalikan dari kiri dengan P^{1}, maka diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -22 & -19 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -22 & -19 \end{pmatrix}$$

b. Perhatikan persamaan matriks:

$$B\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

Jika dimisalkan $Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, maka $Q^{1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$.

Akibatnya, jika persamaan (ii) dikalikan dari kanan dengan Q^{1}, maka diperoleh:

$$B\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 11 \\ -22 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad B = \begin{pmatrix} -15 & 11 \\ -22 & 16 \end{pmatrix}$$

□

Teorema 2.5

Jika matriks A dan B mempunyai invers, maka matriks AB juga mempunyai invers dan

$$(AB)^{-1} = B^{1}A^{-1}$$

B u k t i:

Harus ditunjukkan bahwa $(AB)(B^{1}A^{-1}) = (B^{1}A^{-1})(AB) = I$.
Perhatikan bahwa:

$$(AB)(B^{1}A^{-1}) = A(BB^{1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

dan

$$(B^{1}A^{-1})(AB) = B^{1}(A^{-1}A)B = B^{1}IB = B^{1}B = I$$

Jadi, terbukti bahwa $(AB)^{-1} = B^{1}A^{-1}$.

□

Contoh 2.7.4

Jika diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix},$$

tentukan:

a. matriks AB
b. invers matriks AB atau $(AB)^{-1}$
c. matriks A^{-1}
d. matriks B^{1}
e. matriks $A^{-1}B^{1}$
f. matriks $B^{1}A^{-1}$

Penyelesaian:

a. $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b. $(AB)^{-1} = \dfrac{1}{8-6}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\dfrac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c. $A^{-1} = \dfrac{1}{6-5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

d. $B^{1} = \dfrac{1}{-6+8}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

e. $A^{-1}B^{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ \dfrac{27}{2} & 8 \end{pmatrix}$

f. $B^{1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\dfrac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Dari contoh ini tampak bahwa $(AB)^{-1} = B^{1}A^{-1}$ dan $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{1}$. □

Latihan 2.7

1. Carilah invers dari matriks-matriks berikut (jika ada).

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

d. $D = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

e. $E = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

f. $F = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix}$

2. Tentukan nilai k sedemikian hingga matriks-matriks berikut punya invers.

a. $A = \begin{pmatrix} 2k & 2 \\ k^2 & k+1 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} k-1 & 5 \\ 1 & k+3 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} k^2 & k \\ k^3 & 2k^2 \end{pmatrix}$

(Ingat bahwa suatu matriks punya invers, jika determinannya tidak sama dengan nol).

3. Diketahui matriks-matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks-matriks berikut.

a. A^{-1}
b. B^{-1}
c. AB
d. $(AB)^{-1}$
e. $A^{-1}B^{-1}$
f. $B^{-1}A^{-1}$
g. $A^{-1}A$
h. AA^{-1}
i. A^t
j. $(A^t)^{-1}$
k. $(A^{-1})^t$
l. $2A$
m. $(2A)^{-1}$
n. $(A + B)$
o. $(A + B)^{-1}$
p. $A^{-1} + B^{-1}$

4. Dengan menggunakan hasil-hasil dari No. 3, jawablah pertanyaan berikut ini.
a. Apakah $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$?
b. Apakah $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$?
c. Apakah $A^{-1}A = AA^{-1} = I$?
d. Apakah $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$?
e. Apakah $(2A)^{-1} = 2A^{-1}$?
f. Apakah $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$?

5. Tentukan matriks X sedemikian hingga persamaan-persamaan matriks berikut benar.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. $X \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

d. $X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

6. a. Apakah matriks nol (O) berordo 2×2 mempunyai invers?
b. Apakah matriks identitas (I) berordo 2×2 mempunyai invers? Jika ya, tentukan inversnya.

7. Diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks-matriks berikut.

a. A^{-1}
b. $(A^{-1})^{-1}$
c. $3A$
d. $(3A)^{-1}$
e. $3\,A^{-1}$
f. $\frac{1}{3}\,A^{-1}$
g. $(A + B)$
h. $(A + B)\,(A + B)$
i. $AA + 2AB + BB$
j. $AA + AB + BA + BB$

8. Diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a. Tentukan bilangan real k sedemikian hingga matriks $kI - A$ mempunyai invers.
   b. Tentukan bilangan real k sedemikian hingga matriks $kI - A$ tidak mempunyai invers.

9. Tunjukkan bahwa jika B dan C merupakan invers dari matriks A, maka $B = C$.

10. Tunjukkan bahwa jika $AB = BA$, maka $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, dengan $A^2 = AA$.

2.8 Aplikasi Invers Matriks pada Sistem Persamaan Linear

Invers matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Di dalam subbab ini akan dibahas aplikasi invers matriks pada penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua persamaan dan dua variabel.

Perhatikan sistem persamaan linear dengan dua persamaan dan dua variabel berikut ini.

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ bx + dy &= f. \end{aligned}$$

Kita dapat menyatakan sistem persamaan linear ini dengan persamaan matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Misalkan:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Jika $\det(A) = ad - bc \neq 0$, maka matriks A mempunyai invers dan inversnya adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Jika persamaan matriks (*) dikalikan A^{-1} dari kiri, maka diperoleh:

$$\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

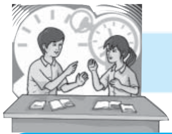
$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Jadi, jika $\det(A) \neq 0$, maka sistem persamaan linear di atas mempunyai penyelesaian.

Catatan:

1. Jika kedua persamaan dari sistem persamaan linear di atas masing-masing digambarkan pada sistem koordinat, maka grafiknya berupa garis lurus.
2. Jika dari sistem persamaan linear tersebut diketahui $ad - bc \neq 0$, maka grafik garis lurusnya akan berpotongan tepat pada satu titik. Ini berarti, sistem persamaan linear tersebut mempunyai tepat satu penyelesaian.



Tugas Kelompok

Bagaimana jika diketahui $ad - bc = 0$? Berikan beberapa contoh untuk kasus ini dan gambarkan masing-masing pada sistem koordinat. (Perhatikan: Jika grafik dari kedua persamaan tersebut berimpit, berarti sistem persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian yang banyaknya tak hingga, sedangkan jika grafik dari kedua persamaan linear tersebut saling sejajar, maka sistem persamaan linear tersebut tidak mempunyai penyelesaian).

Berikut ini diberikan contoh cara menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan invers matriks.

Contoh 2.8.1

Dengan menggunakan invers matriks, tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x + 3y = 15 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa sistem persamaan linear:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x + 3y = 15 \end{cases}$$

dapat disajikan dalam bentuk persamaan matriks:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Jika matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, maka det $(A) = (3)(3) - (2)(4) = 9 - 8 = 1$. Akibatnya, matriks A mempunyai invers dengan:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Jika persamaan matriks di atas dikalikan A^{-1} dari kiri, maka akan diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24-30 \\ -32+45 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -6 \quad \text{dan} \quad y = 13$$

Jadi, himpunan penyelesaian sistem persamaan linear di atas adalah {(–6,13)}.

□

Contoh 2.8.2

Diketahui sistem persamaan linear:

$$\begin{cases} 5x + 3y = k \\ 6x + 4y = m \end{cases}$$

Nyatakan penyelesaian untuk x dan y dalam k dan m.

Penyelesaian:

Sistem persamaan linear di atas dapat disajikan dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}$$

Jika $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, maka $A^{-1} = \dfrac{1}{20-18}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.

Jika persamaan matriks di atas dikalikan A^{-1} dari kiri, maka diperoleh:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4k-3m \\ -6k+5m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4k-3m \\ -6k+5m \end{pmatrix}$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan linear di atas adalah:

$$x = \frac{1}{2}(4k-3m) \quad \text{dan} \quad y = \frac{1}{2}(-6k+5m)$$

Latihan 2.8

1. Dengan menggunakan invers matriks, tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.

   a. $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x+y=2 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 2x+4y=1 \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} x+2y=4 \\ 5x+y=2 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} 5x+6y=15 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$

   e. $\begin{cases} x+2y+3=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$

   f. $\begin{cases} 4x+5y-15=0 \\ 3x+y+8=0 \end{cases}$

2. a. Jika $AX = B$, dengan:

   $$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \text{dan } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   tentukan nilai-nilai dari x dan y.

   b. Jika $AX = B$, dengan:

   $$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \text{dan } B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   tentukan nilai-nilai dari x dan y.

3. Dengan menggunakan invers matriks, selesaikan sistem persamaan linear berikut.

   $$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 6x+4y=16 \end{cases}$$

   a. Apakah sistem persamaan linear di atas dapat diselesaikan dengan invers matriks?
   b. Gambarkan masing-masing persamaan linear di atas dalam sistem koordinat Cartesius?
   c. Diskusikan dengan teman Anda, apakah sistem persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian? Jika ada, sebutkan penyelesaiannya.

4. Dengan menggunakan invers matriks, selesaikan sistem persamaan linear berikut.

   $$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=5 \end{cases}$$

   a. Apakah sistem persamaan linear di atas dapat diselesaikan dengan invers matriks?
   b. Gambarkan masing-masing persamaan linear di atas dalam sistem koordinat Cartesius?
   c. Diskusikan dengan teman Anda, apakah sistem persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian? Jika ada, sebutkan penyelesaiannya.

5. Dari sistem persamaan linear berikut ini, tentukan mana sistem persamaan linear yang mempunyai tepat satu penyelesaian, tidak mempunyai penyelesaian, dan mempunyai penyelesaian yang banyaknya tak hingga.

a. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+3y=9 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x-y=4 \\ 5x-5y=15 \end{cases}$

2.9 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Determinan

Di dalam Buku Matematika Kelas X telah dibahas penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dan tiga variabel dengan menggunakan cara eliminasi. Pada subbab ini akan dibahas penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dan tiga variabel dengan cara determinan.

2.9.1 Sistem Persamaan Linear dengan Dua Variabel

Sebelum kita menggunakan cara determinan, sebagai penyegaran kita ingat sekilas penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan menggunakan cara eliminasi. Untuk ini perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.9.1

Dengan menggunakan cara eliminasi, selesaikan sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 4x+3y=15 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Dari sistem persamaan linear di atas, diperoleh:

$$\begin{array}{llcl} 3x+2y=8 & |\times 3| & \Rightarrow & 9x+6y=24 \\ 4x+3y=15 & |\times 2| & \Rightarrow & \underline{8x+6y=30} \; - \\ & & & x \quad\;\; = -6 \end{array}$$

Dari $x = -6$ dan $3x + 2y = 8$, diperoleh:

$$\begin{array}{lcl} (3)(-6) + 2y = 8 & \Leftrightarrow & 2y = 8 + 18 \\ & \Leftrightarrow & 2y = 26 \\ & \Leftrightarrow & y = 13 \end{array}$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan linear di atas adalah $x = -6$ dan $y = 13$.

□

Sekarang perhatikan bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel berikut.

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = m \end{cases}$$

Dengan menggunakan cara eliminasi, diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{array}{llll} ax + by = k & | \times c | & \Rightarrow & acx + bcy = kc \\ cx + dy = m & | \times a | & \Rightarrow & \underline{acx + ady = ma} \; - \\ & & & (bc - ad)y = kc - ma \end{array}$$

Jika $bc - ad \neq 0$, maka diperoleh:

$$y = \frac{kc - ma}{bc - ad} = \frac{am - ck}{ad - bc}$$

dan

$$\begin{array}{llll} ax + by = k & | \times d | & \Rightarrow & adx + bdy = kd \\ cx + dy = m & | \times b | & \Rightarrow & \underline{bcx + bdy = bm} \; - \\ & & & (ad - bc)x = kd - bm \\ & & & x = \dfrac{kd - bm}{ad - bc} \end{array}$$

Jadi, penyelesaian bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel adalah:

$$x = \frac{kd - bm}{ad - bc} \quad \text{dan} \quad y = \frac{am - ck}{ad - bc}$$

Sekarang akan dibahas cara penyelesaian untuk sistem persamaan linear dua variabel dengan cara determinan. Perhatikan lagi bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel berikut.

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = m \end{cases}$$

Jika dimisalkan:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} k & b \\ m & d \end{vmatrix} = kd - bm,\ \text{dan } \Delta_y = \begin{vmatrix} a & k \\ c & m \end{vmatrix} = am - ck$$

maka penyelesaian sistem persamaan linear di atas adalah:

$$x = \frac{kd - bm}{ad - bc} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{dan} \quad y = \frac{am - ck}{ad - bc} = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Cara penyelesaian yang terakhir ini yang disebut dengan penyelesaian cara determinan.

Contoh 2.9.2

Dengan menggunakan cara determinan, tentukan penyelesaian sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} 6x+7y=9 \\ 3x+4y=6 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Kita hitung lebih dahulu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 21 = 3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 42 = -6$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 27 = 9$$

sehingga:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -2 \quad \text{dan} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 3$$

□

Catatan:

1. Jika pada sistem persamaan linear di atas didapat $\Delta \neq 0$, maka sistem persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian dan penyelesaiannya tunggal.
2. Jika pada sistem persamaan linear di atas didapat $\Delta = 0$, maka terdapat dua kemungkinan, kemungkinan pertama sistem persamaan linear tersebut tidak mempunyai penyelesaian dan kemungkinan kedua mempunyai penyelesaian yang banyaknya tak hingga.

Tugas Mandiri

1. Berikan penjelasan lebih detail untuk sistem persamaan linear $AX = b$, dengan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}$, dan $\det(A) = 0$, dengan pendekatan aljabar dan pendekatan geometri.
2. Berikan beberapa kemungkinan penyelesaian untuk soal No. 1.

Untuk memberikan penjelasan catatan kedua, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 2.9.3

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut (jika ada).

a. $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 4x+6y=-2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4x+6y=10 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$

Penyelesaian:

a. Semua pasangan berurutan (x,y) yang memenuhi persamaan $2x + 3y = -1$ pasti juga memenuhi persamaan $4x + 6y = -2$. Ini berarti bahwa himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear tersebut adalah:
$$HP = \{(x,y) \mid 2x + 3y = -1\}.$$
Karena banyaknya pasangan (x,y) yang memenuhi persamaan tersebut banyaknya tak hingga, maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian yang banyaknya tak hingga. Perhatikan bahwa untuk sistem persamaan linear ini diperoleh $\Delta = (2)(6) - (3)(4) = 12 - 12 = 0$.

b. Jika persamaan $4x + 6y = 10$ dibagi dua, maka diperoleh $2x + 3y = 5$. Pasangan (x,y) yang memenuhi persamaan $2x + 3y = 5$ dan sekaligus persamaan $2x + 3y = 6$ tidak ada. Ini berarti, sistem persamaan linear tersebut tidak mempunyai penyelesaian. Perhatikan bahwa untuk sistem persamaan linear ini diperoleh $\Delta = (4)(3) - (6)(2) = 12 - 12 = 0$.

□

Di dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai suatu persoalan yang model matematikanya berupa sistem persamaan linear. Berikut sebuah contoh tentang hal ini.

Contoh 2.9.4

Seorang siswa ingin membeli kue dan es krim. Jika ia membeli 3 kue dan 3 es krim, maka ia harus membayar Rp7.500,00, sedangkan jika ia membeli 2 kue dan 4 es krim, maka ia harus membayar Rp8.000,00. Berapakah harga sebuah kue dan sebuah es krim?

Penyelesaian:

Misalkan: harga sebuah kue adalah x rupiah
harga sebuah es krim adalah y rupiah

Dari informasi yang diberikan dalam soal di atas, diperoleh model matematika:
$$3x + 3y = 7.500$$
$$2x + 4y = 8.000$$
sehingga:
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 6 = 6$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7.500 & 3 \\ 8.000 & 4 \end{vmatrix} = 30.000 - 24.000 = 6.000$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7.500 \\ 2 & 8.000 \end{vmatrix} = 24.000 - 15.000 = 9.000$$

Akibatnya,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1.000 \ \text{ dan } \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1.500$$

Jadi, harga sebuah kue adalah Rp1.000,00 dan harga sebuah es krim adalah Rp1.500,00.

□

2.9.2 Sistem Persamaan Linear dengan Tiga Variabel

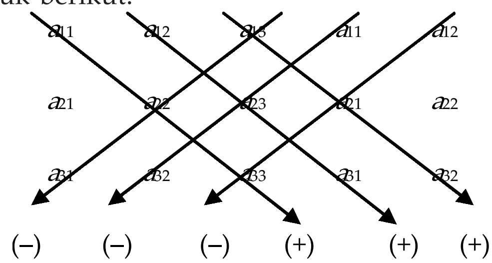
Kita ingat kembali definisi determinan matriks persegi ordo 3 × 3, jika

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

maka determinan dari A adalah bilangan real yang didefinisikan dengan

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Untuk mengingat rumus determinan matriks ordo 3 × 3 ini, kita perhatikan bentuk berikut.



Dengan menggunakan rumus determinan matriks ordo 3 × 3, kita akan menyelesaikan sistem persamaan linear dengan tiga persamaan dan tiga variabel. Bentuk umum dari sistem persamaan linear ini adalah:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = p \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = q \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = r \end{cases}$$

Jika dimisalkan:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\Delta_x = \begin{array}{|ccc|cc} p & a_{12} & a_{13} & p & a_{12} \\ q & a_{22} & a_{23} & q & a_{22} \\ r & a_{32} & a_{33} & r & a_{32} \end{array}$$

$$\Delta_y = \begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & p & a_{13} & a_{11} & p \\ a_{21} & q & a_{23} & a_{21} & q \\ a_{31} & r & a_{33} & a_{31} & r \end{array}$$

$$\Delta_z = \begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & p & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & q & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & r & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

maka penyelesaian sistem persamaan linear dengan tiga persamaan dan tiga variabel di atas adalah:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad \text{dan} \quad z = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

Cara penyelesaian sistem persamaan linear dengan cara di atas disebut penyelesaian cara determinan atau sering disebut juga cara aturan Cramer.

Contoh 2.9.5

Dengan menggunakan cara determinan, selesaikan sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + 3y + \ \ z = 4 \\ x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Kita hitung lebih dahulu:

$$\Delta = \begin{array}{|ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{array} = 6 + 2 + 6 - 6 - 3 - 4 = 1$$

$$\Delta_x = \begin{array}{|ccc|cc} -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{array} = -6 + 6 + 24 - 18 + 3 - 16 = -7$$

$$\Delta_y = \begin{array}{|ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{array} = 8 - 1 + 6 - 8 - 3 + 2 = 4$$

$$\Delta_z = \begin{array}{|ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \end{array} = 9 + 8 - 3 + 3 - 12 - 6 = -1$$

Jadi, penyelesaian dari sistem persamaan linear di atas adalah:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -7, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 4, \quad \text{dan} \quad z = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1$$

□

Contoh 2.9.6

Seorang anak ingin membeli buah jeruk, apel, dan mangga. Jika dia membeli 2 jeruk, 3 apel, dan 1 mangga, maka dia harus membayar Rp8.500,00. Jika dia membeli 1 jeruk, 4 apel, dan 2 mangga, maka dia harus membayar Rp11.000,00, sedangkan jika dia membeli 3 jeruk, 2 apel, dan 2 mangga, maka dia harus membayar Rp10.000,00.

a. Buatlah model matematika untuk persoalan di atas dalam bentuk sistem persamaan linear.
b. Dengan menggunakan cara determinan, selesaikan sistem persamaan linear yang telah diperoleh.
c. Berapakah harga 1 buah jeruk, 1 buah apel, dan 1 buah mangga?

Penyelesaian:

a. Misalkan: harga satu buah jeruk adalah x rupiah,
harga satu buah apel adalah y rupiah, dan
harga satu buah mangga adalah z rupiah.

Dari informasi pada soal di atas, diperoleh model matematika yang berupa sistem persamaan linear dengan tiga variabel dan tiga persamaan, sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 8.500 \\ x + 4y + 2z &= 11.000 \\ 3x + 2y + 2z &= 10.000 \end{aligned}$$

b. Dengan menggunakan cara determinan, sistem persamaan linear ini dapat diselesaikan sebagai berikut.

Dari sistem persamaan linear yang diperoleh, diketahui:

$$\Delta = \begin{array}{|ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{array}$$

$$= 16 + 18 + 2 - 12 - 8 - 6$$
$$= 10$$

$$\Delta_x = \begin{array}{|ccc|cc} 8.500 & 3 & 1 & 8.500 & 3 \\ 11.000 & 4 & 2 & 11.000 & 4 \\ 10.000 & 2 & 2 & 10.000 & 2 \end{array}$$

$$= 68.000 + 60.000 + 22.000 - 40.000 - 34.000 - 66.000$$
$$= 10.000$$

$$\Delta_y = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 8.500 & 1 \\ 1 & 11.000 & 2 \\ 3 & 10.000 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 8.500 \\ 1 & 11.000 \\ 3 & 10.000 \end{array}$$

$= 44.000 + 51.000 + 10.000 - 33.000 - 40.000 - 17.000$
$= 15.000$

$$\Delta_z = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 8.500 \\ 1 & 4 & 11.000 \\ 3 & 2 & 10.000 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{array}$$

$= 80.000 + 99.000 + 17.000 - 102.000 - 44.000 - 30.000$
$= 20.000$

Jadi, penyelesaian dari sistem persamaan linear di atas, adalah:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1.000, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1.500, \quad \text{dan} \quad z = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2.000$$

c. Jadi, harga satu buah jeruk adalah Rp1.000,00,
harga satu buah apel adalah Rp1.500,00, dan
harga satu buah mangga adalah Rp2.000,00.

Latihan 2.9

1. Dengan menggunakan cara determinan, tentukan penyelesaian sistem persamaan linear berikut.

a. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5x + 3y = 18 \\ -2x - 3y = 9 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 3x + 2y + 14 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 4x + 5y - 12 = 0 \\ 3x + 5y + 8 = 0 \end{cases}$

2. Dengan menggunakan cara determinan, selesaikan sistem persamaan linear berikut.

a. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3} = 8 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{5}-6=0 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}-3=0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{9}+1=0 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+2=0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}+\dfrac{y+2}{5}+2=0 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{y-1}{5}+1=0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}+\dfrac{y-2}{4}+1=0 \\ \dfrac{x-2}{2}+\dfrac{y-2}{2}-1=0 \end{cases}$

3. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut (jika mungkin) dan berikan penjelasan jika tidak mungkin.

   a. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+6y=9 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 4x-2y=0 \end{cases}.$

4. Jumlah dua buah bilangan adalah 37, sedangkan selisih dua buah bilangan tersebut adalah 13.
   a. Buatlah model matematika untuk persoalan ini dalam bentuk sistem persamaan linear.
   b. Dengan menggunakan cara determinan, selesaikan sistem persamaan linear yang telah diperoleh.
   c. Berapakah bilangan-bilangan tersebut?

5. Seorang pemborong bangunan mempekerjakan beberapa tukang batu dan beberapa tukang kayu. Jika dia mempekerjakan 3 tukang batu dan 2 tukang kayu, maka dia harus membayar Rp135.000,00 setiap hari, sedangkan jika dia mempekerjakan 4 tukang batu dan 3 tukang kayu, maka dia harus membayar Rp190.000,00.
   a. Buatlah model matematika untuk persoalan ini dalam bentuk sistem persamaan linear.
   b. Dengan menggunakan cara determinan, selesaikan sistem persamaan linear yang telah diperoleh.
   c. Berapakah upah tukang batu dan tukang kayu setiap hari?

6. Dengan menggunakan cara determinan, selesaikan sistem persamaan linear dengan tiga variabel dan tiga persamaan berikut ini.

   a. $\begin{cases} 2x-3y+z=6 \\ -3x+4y+z=3 \\ 2x+3y-5z=7 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 2x-4y-3z=5 \\ 5x+2y+4z=8 \\ 2x+6y-5z=12 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} x-5y+3z-12=0 \\ 2x+3y-3z+10=0 \\ 3x-3y-6z-15=0 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} 5x-2y-4z-15=0 \\ 4x+3y+2z-8=0 \\ 2x+3y-3z-12=0 \end{cases}$

7. Apakah sistem persamaan linear berikut mempunyai penyelesaian? Berikan alasannya.

a. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + 2z = 12 \\ 3x + 3y + 3z = 18 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 2y + 2z = 8 \\ 2x + 2y - 5z = 10 \end{cases}$

8. Budi, Hasan, dan Alia menabung uang di sebuah bank. Jumlah tabungan ketiga anak tersebut adalah Rp1.000.000,00. Jumlah tabungan Budi dan Hasan adalah Rp500.000,00, sedangkan jumlah tabungan Hasan dan Alia adalah Rp800.000,00.
   a. Buatlah model matematika untuk persoalan ini dalam bentuk sistem persamaan linear.
   b. Dengan menggunakan cara determinan, selesaikan sistem persamaan linear yang telah diperoleh.
   c. Berapakah masing-masing tabungan Budi, Hasan, dan Alia?

Rangkuman

1. Pengertian dan Ordo Matriks
   a. Pengertian matriks
      Matriks adalah susunan dari bilangan-bilangan yang berbentuk persegi panjang dan disusun dalam bentuk baris dan kolom. Selanjutnya matriks dinotasikan dengan huruf besar (kapital).
   b. Ordo matriks
      Matriks A dikatakan mempunyai ordo atau ukuran $m \times n$, jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom. Selanjutnya matriks dengan ordo $m \times n$ dinotasikan dengan $A_{m \times n}$.
2. Jenis-jenis Matriks
   a. Berdasarkan banyaknya baris dan kolom penyusunnya
      1) Matriks baris, yaitu matriks yang mempunyai satu baris saja.
      2) Matriks kolom, yaitu matriks yang mempunyai satu kolom saja.
      3) Matriks persegi, yaitu matriks yang mempunyai banyak baris sama dengan banyaknya kolom.
   b. Berdasarkan elemen-elemen penyusunnya
      1) Matriks nol, yaitu matriks yang semua entrinya nol.
      2) Matriks identitas, yaitu matriks persegi yang semua entri pada diagonal utamanya bernilai 1 dan entri yang lain bernilai nol.
      3) Matriks diagonal, yaitu matriks yang entri-entri di luar diagonal utama bernilai nol.

4) Matriks segitiga atas, yaitu matriks yang entri-entri di bawah diagonal utama bernilai nol.
5) Matriks segitiga bawah, yaitu matriks yang entri-entri di atas diagonal utama bernilai nol.

3. Transpose Matriks
Transpose suatu matriks A adalah matriks baru yang diperoleh dengan menukar baris dengan kolom. Selanjutnya notasi dari transpose matriks A adalah A^t.

4. Kesamaan Dua buah Matriks
Matriks A dikatakan sama dengan matriks B, jika ordo matriks A sama dengan ordo matriks B dan entri-entri yang seletak nilainya sama.

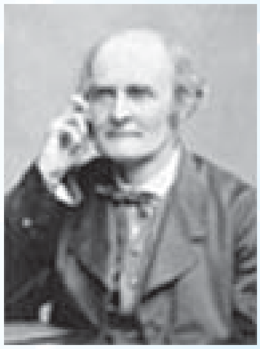
5. Operasi Aljabar pada Matriks
   a. Penjumlahan matriks
   Jika matriks $A = (a_{ij})$ dan matriks $B = (b_{ij})$ adalah dua buah matriks yang berordo sama $m \times n$, maka jumlah kedua matriks dinotasikan dengan $A + B$ adalah suatu matriks baru $C = (c_{ij})$ juga berodo $m \times n$ dangan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk setiap i dan j.
   b. Pengurangan matriks
   Jika matriks $A = (a_{ij})$ dan matriks $B = (b_{ij})$ adalah dua buah matriks yang berordo sama $m \times n$, maka matriks A dikurangi matriks B dinotasikan dengan $A - B$ adalah suatu matriks baru $C = (c_{ij})$ juga berodo $m \times n$ dengan $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ untuk setiap i dan j.
   c. Perkalian matriks
   Dua buah matriks dapat dikalikan, jika banyaknya kolom matriks pertama sama dengan banyaknya baris matriks kedua. Jika matriks $A = (a_{ij})$ berodo $m \times n$ dan matriks $B = (b_{ij})$ berordo $n \times q$, maka matriks $C = AB$ adalah matriks berordo $m \times q$ dengan:
   $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$
   untuk setiap i dan j.

6. Invers Matriks
Matriks A dikatakan mempunyai invers, jika terdapat matriks B sedemikian hingga $AB = I = BA$. Jika A matriks berordo 2×2 dengan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka invers matriks A dilambangkan dengan A^{-1}, dengan $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

7. Aplikasi Matriks pada Sistem Persamaan Linear
Suatu sistem persamaan linear dapat diubah menjadi persamaan matriks berbentuk $AX = B$, selanjutnya jika matriks A mempunyai invers A^{-1}, maka penyelesaian sistem persamaan linearnya dapat dinyatakan dengan $X = A^{-1}B$.

Math Info

Arthur Cayley merupakan salah satu ilmuwan yang terkenal pada abad 19 yang berasal dari Inggris. Ia lahir di Richmond, Surrey, Inggris pada tanggal 16 Agustus 1821. Di bidang matematika, beliau sangat terkenal karena pengembangan teori matriksnya. Di awal perkem-bangannya matriks hanya dianggap sebagai suatu permainan karena tidak mempunyai aplikasi. Tetapi setelah beliau meninggal, teori matriks banyak mempunyai aplikasi, salah satunya pada bidang fisika kuantum, selanjutnya teori matriks mempunyai perkembangan yang cukup pesat dan mempunyai aplikasi pada berbagai bidang.



Gambar 2.2 Arthur Cayley

Uji Kompetensi

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Banyaknya kolom dari matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

adalah ... .

A. tiga
B. empat
C. lima belas
D. lima
E. dua belas

2. Elemen yang terletak pada baris ke-3 kolom ke-2 pada matriks A di atas adalah ... .

A. 4
B. 1
C. 6
D. 7
E. 5

3. Diketahui matriks-matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jika matriks $C = AB$, maka matriks C tersebut adalah ... .

A. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

4. Diketahui matriks-matriks:

$$F = \begin{pmatrix} 4 & x \\ y & 5 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} x & 3 \\ z & w \end{pmatrix},\ \text{dan } H = \begin{pmatrix} y & 5 \\ 1 & 2z \end{pmatrix}$$

Jika $2F = G + H$, maka nilai dari x, y, z, dan w masing-masing adalah ... .

A. 4, 4, 7, dan –4
B. 4, 4, –7, dan –4
C. 4, –4, 7, dan –4
D. 4, –4, 7, dan 4
E. 4, –4, –7, dan –4

5. Misalkan:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Entri-entri baris ketiga dari matriks AB adalah ... .

A. 0, 28, dan 45
B. 7, 11, dan 14
C. 63, 57, dan 67
D. 63, 67, dan 57
E. 67, 63, dan 57

6. Diketahui persamaan matriks:

$$\begin{pmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Nilai a, b, c, dan d dari persamaan matriks di atas adalah ... .

A. 5, –3, –4, dan –1
B. 5, –3, 4, dan 1
C. 5, –3, 4, dan 1
D. 5, –3, 4, dan –1
E. 5, 3, 4, dan 1

7. Jika $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, maka matriks $5P - 2Q$ adalah ... .

A. $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

8. Misalkan A dan B adalah matriks berukuran 2 × 2 dan masing-masing mempunyai invers A^{-1} dan B^{-1}. Pernyataan berikut bernilai benar, *kecuali* ... .

A. $(AB)^t = B^t A^t$
B. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
C. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
D. $AB = BA$
E. $(A^{-1})^{-1} = A$

9. Jika diketahui invers dari matriks A adalah:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

maka matriks $B = 4A$ adalah ... .

A. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -12 & -8 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$

10. Diketahui persamaan berikut.

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ x-2 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+5 & -x \\ x & 1 \end{vmatrix}$$

Nilai x yang memenuhi persamaan di atas adalah ... .

A. $x_1 = -1$ atau $x_2 = 3$
B. $x_1 = -1$ atau $x_2 = -3$
C. $x_1 = -2$ atau $x_2 = 3$
D. $x_1 = 1$ atau $x_2 = -3$
E. $x_1 = 1$ atau $x_2 = 3$

11. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 2y & 3z \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2y+3z & 2x+4 \\ x & y+7 \end{pmatrix}$. Jika $2A = B^t$, maka nilai x, y, dan z masing-masing adalah ... .

A. 2, 5, dan 8
B. 5, 2, dan 8
C. 5, 8, dan 2
D. 8, 5, dan 2
E. 8, 2, dan 5

12. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$. Jika $A = B^{-1}$, maka nilai x dan y masing-masing adalah ... .

A. 4 dan –2
B. 3 dan 5
C. 4 dan 4
D. –2 dan 4
E. –4 dan –4

13. Diketahui sistem persamaan linear:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Nilai x dan y dari sistem persamaan linear di atas adalah ... .

A. 5 dan 3
B. 3 dan 5
C. –3 dan 5
D. –5 dan –3
E. –3 dan –5

14. Diketahui persamaan garis g_1: $2x - y - 5 = 0$ dan g_2: $3x - y - 7 = 0$. Kedua garis tersebut berpotongan di titik ... .

A. (2,1)
B. (–2,1)
C. (2,–1)
D. (–2,–1)
E. (2,3)

15. Nilai a agar matriks $A = \begin{pmatrix} a+2 & 2 \\ a-1 & a-3 \end{pmatrix}$ merupakan matriks singular adalah ... .

A. –2 atau 3
B. 2 atau –3
C. 1 atau 4
D. –1 atau 4
E. 1 atau –4

B. Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan langkah-langkah yang tepat!

16. a. Berikan contoh matriks A dan B berukuran 2×2 sehingga:
$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$
    b. Berikan syarat pada matriks A dan B sedemikian hingga berlaku:
$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

17. Diketahui sistem persamaan linear:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$$
    a. Nyatakan sistem persamaan linear ini dalam bentuk persamaan matriks.
    b. Selesaikan persamaan matriksnya dengan menggunakan invers matriks.

18. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Tentukan:
    a. AB
    b. $(AB)^{-1}$
    c. $A^{-1}\,B^{-1}$
    d. $B^{-1}\,A^{-1}$

19. Wisnu dan Yuli membeli 2 jenis mainan, yaitu boneka dan bola. Wisnu membeli 5 buah boneka dan 2 buah bola, sedangkan Yuli membeli 3 buah boneka dan 3 buah bola. Mereka masing-masing membayar Rp360.000,00 dan Rp270.000,00.
    a. Susunlah sistem persamaan linear dari persoalan di atas.
    b. Nyatakan sistem persamaan linear yang diperoleh dalam bentuk persamaan matriks.
    c. Tentukan harga dari sebuah boneka dan sebuah bola.

20. Ali, Budi, dan Ani menabung di sebuah bank. Jumlah tabungan ketiga anak tersebut adalah Rp30.000,00. Jumlah tabungan Ali dan Budi dikurangi tabungan Ani adalah Rp15.000,00, sedangkan jumlah tabungan Ali dan Ani adalah Rp21.500,00.
    a. Buatlah model matematika untuk persoalan ini.
    b. Dengan menggunakan cara determinan, selesaikan sistem persamaan linear yang telah diperoleh dari a.
    c. Berapakah besar masing-masing tabungan dari Ali, Budi, dan Ani?

Soal Analisis

1. Seorang pedagang buah-buahan membeli 20 kg buah jeruk, 30 kg buah apel, 25 kg buah mangga, dan 15 kg buah pepaya. Jika harga per kg berturut-turut Rp7.000,00, Rp10.000,00, Rp3.000,00, dan Rp1500,00, selesaikan dengan matriks untuk memperoleh jumlah uang yang harus dibayarkan oleh pedagang buah tersebut.

2. Sebuah gedung pertunjukan mempunyai tempat duduk 10.000 kursi. Suatu panitia pertunjukkan akan mengadakan pertunjukan spektakuler yang menampilkan artis ibukota di gedung itu dengan menjual 3 jenis karcis, masing-masing adalah kelas biasa seharga Rp20.000,00, kelas VIP seharga Rp50.000,00, dan kelas super VIP seharga Rp100.000,00. Berapa karcis yang terjual untuk masing-masing kelas agar diperoleh pemasukan Rp350.000.000,00?

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama : .... Tanggal : ....

Kelas : XII Materi Pokok : Matriks

Kelompok : .... Semester : 1 (satu)

Kegiatan : Survei tentang data waktu belajar di luar sekolah

Tujuan : Menentukan rerata waktu jam belajar di luar sekolah

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. Alat tulis
2. Buku catatan
3. Daftar isian
4. Kelas yang disurvei

B. Cara kerja

1. Buatlah kelompok yang terdiri dari 4 atau 5 siswa.
2. Ambillah dua kelas di sekolah Anda untuk disurvei tentang lamanya belajar di luar sekolah.
3. Lakukan wawancara dengan siswa dari kelas yang telah Anda pilih tentang lamanya belajar di luar sekolah. Catat hasil wawancara Anda, dan bedakan untuk setiap kelas antara laki-laki dan perempuan.
4. Jumlahkan lamanya waktu belajar untuk setiap kategori (laki-laki dan perempuan) untuk setiap kelas. Tentukan rerata untuk setiap kategori dan rerata kelas (bulatkan). Kemudian isikan ke dalam daftar isian berikut.

	Lamanya Belajar		Jumlah
	Laki-laki	Perempuan	
Kelas A			
Kelas B			

C. Analisis

1. Misalkan x adalah jumlah siswa laki-laki dan y adalah jumlah siswa perempuan, tentukan model matematika dari data yang Anda peroleh.
2. Nyatakan model yang Anda peroleh dengan notasi matrik. Misalkan A adalah matriks lamanya waktu belajar. Tentukan x dan y dengan menggunakan invers dari A.
3. Tentukan rerata waktu belajar untuk siswa laki-laki, siswa perempuan, kelas A, dan kelas B.

Teka-Teki Matematika

Kode Rahasia dengan Menggunakan Matriks

Misalkan agen rahasia 007 mengirimkan informasi "siap", yang maksudnya siap untuk menyerang. Ia memberi nomor kepada huruf alphabet Latin 1, 2, 3, ... , 26 untuk huruf-huruf A, B, C, ... , Z berturut-turut (boleh juga berlainan), sehingga huruf-huruf pada perkataan "siap" menjadi 19, 9, 1, 16. Kemudian 19, 9, 1, dan 16 ditulis dalam bentuk matriks $\begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}$. Untuk menghindarkan orang lain dapat menerka perkataan yang ditulis dengan $\begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}$, maka matriks tersebut dikalikan dengan matriks kode $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Hasilnya $\begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 74 \\ 49 & 66 \end{pmatrix}$.

Karena 46, 74, 49, dan 66 tidak terdapat di antara nomor-nomor kode huruf itu dan karena paling besar nomor kode huruf itu 26, ia kurangi 46, 74, 49, dan 66 itu dengan kelipatan 26 sehingga sisanya masing-masing kurang dari 26. Setelah ia melakukan pengurangan itu maka 46, 74, 49, dan 66 itu menjadi 20, 22, 23, dan 14. Kode 20, 22, 23, dan 14 diubah lagi ke dalam huruf menjadi *TXWN*.

Jadi, agen rahasia 007 itu menyampaikan (tertulis) "*TXWN*" yang artinya "siap". Perlu diingat bahwa huruf berulang pada kata yang sudah dikodekan bukan merupakan huruf berulang pada kata asal dan sebaliknya.

Sekarang coba buatlah kode rahasia dari kata "Awas".

Latihan Ulangan Umum Semester 1

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 30, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Persamaan garis yang melalui titik (0,10) dan (8,0) adalah ... .
   A. $4y = 5x + 40$
   B. $4y = -5x + 40$
   C. $4y = 5x - 40$
   D. $5y = 4x - 40$
   E. $5y = -4x + 40$

2. Titik potong garis $3x - 4y = 10$ dan $x + y = 8$ adalah ... .
   A. (6,2)
   B. (–6,2)
   C. (–2,6)
   D. (2,6)
   E. (–6,–2)

3. Bangun datar yang menggambarkan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear: $3x + 2y \leq 30$, $2x + 3y \leq 30$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ berbentuk ... .
   A. trapesium
   B. segi empat
   C. segi lima
   D. empat persegi panjang
   E. segitiga

4. Banyaknya baris dari matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -5 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   adalah ... .
   A. tiga
   B. empat
   C. lima belas
   D. lima
   E. dua belas

5. Elemen yang terletak pada baris ke-3 kolom ke-2 pada matriks A di atas adalah ... .
   A. 4
   B. 1
   C. 6
   D. 7
   E. 5

6. Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ dan $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$, maka $f(A)$ adalah ... .
   A. $\begin{pmatrix} 21 & 6 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$
   B. $\begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 40 & -2 \end{pmatrix}$
   C. $\begin{pmatrix} 24 & 16 \\ 24 & 16 \end{pmatrix}$
   D. $\begin{pmatrix} 24 & 24 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$
   E. $\begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 40 & 0 \end{pmatrix}$

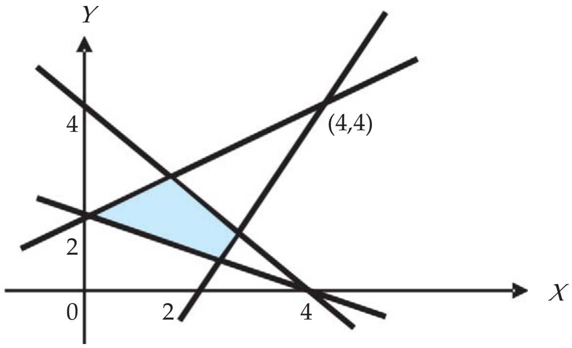
7. Seorang penjahit ingin membuat 2 jenis pakaian yaitu jenis A dan jenis B, masing-masing memerlukan dua bahan kain, yaitu bahan I dan bahan II. Untuk pakaian jenis A memerlukan kain bahan I sebanyak 2 m dan kain bahan II sebanyak 0,25 m. Untuk pakaian jenis B memerlukan kain bahan I sebanyak 1 m dan kain bahan II sebanyak 0,5 m. Kain bahan I tersedia 30 m dan kain bahan II tersedia 12 m. Jumlah kedua pakaian yang dapat dibuat sebanyak-banyaknya adalah ... .
   A. 15
   B. 24
   C. 26
   D. 30
   E. 48

8. Matriks B dikatakan serupa dengan matrik A, jika terdapat matriks P yang dapat dibalik sedemikian hingga $B = P^{1}AP$. Jika A dan B merupakan matriks-matriks yang serupa, maka pernyataan berikut benar, *kecuali* ... .
   A. A^t dan B^t serupa
   B. A dapat dibalik jika dan hanya jika B dapat dibalik
   C. Jika A dan B dapat dibalik, maka A^{-1} dan B^{1} serupa
   D. Matriks A sama dengan matriks B
   E. Jika A serupa dengan B dan B serupa dengan C, maka A serupa dengan C

9. Jika A matriks berukuran 3×3 dan $\det(A) = 5$, maka nilai dari $\det((2A)^{-1})$ adalah ... .
   A. 10
   B. 40
   C. 45
   D. $\dfrac{1}{45}$
   E. $\dfrac{1}{40}$

10. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, dan X adalah matriks berordo 2×2. Bila $AX = B$, maka matriks X adalah ... .
   A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$
   B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$
   C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
   D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
   E. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

11. Daerah yang diarsir pada diagram Cartesius di bawah ini merupakan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan ... .



A. $x + y \leq 4$
$x + 2y \geq 4$
$x - 2y \leq -4$
$2x - y \geq 4$

B. $x + y \leq 4$
$x + 2y \geq 4$
$x - 2y \geq 4$
$2x - y \leq 4$

C. $x + y \leq 4$
$x + 2y \leq 4$
$x - 2y \leq -4$
$2x - y \leq 4$

D. $x + y \geq 4$
$x + 2y \geq 4$
$x - 2y \leq -4$
$2x - y \leq 4$

E. $x + y \leq 4$
$x + 2y \geq 4$
$x - 2y \geq -4$
$2x - y \leq 4$

12. Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 2y & 3z \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2z-3y & 2x+1 \\ x & y+7 \end{pmatrix}$ serta $A = 2B^t$, maka nilai z adalah ... .

A. 10
B. 8
C. 5
D. 3
E. 2

13. Nilai maksimum fungsi objektif $f(x,y) = 2x + 5y$ pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear: $x + y \leq 12$, $x + 2y \leq 16$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ adalah ... .

A. 12
B. 24
C. 36
D. 40
E. 52

14. Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 5+a & a \\ 5 & 3a \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 9 & -a \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ serta $\det(A) = \det(B)$, maka nilai a adalah ... .

A. 3 atau 4
B. –3 atau 4
C. 3 atau –4
D. –4 atau 5
E. 3 atau –5

15. Jika A matriks simetrik ($A^t = A$), maka pernyataan berikut benar, *kecuali* ... .

A. A^t juga simetrik
B. $(A + A^t)$ juga simetrik
C. $(A - A^t)$ juga simetrik
D. $-A$ juga simetrik
E. A mempunyai invers

16. Nilai x dan y yang memaksimumkan fungsi tujuan: $f(x,y) = 5x + 4y$ pada daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan: $3x + y \leq 15$, $x + y \leq 9$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ adalah ... .

A. 38
B. 45
C. 60
D. 36
E. 25

17. Nilai minimum fungsi $f(x,y) = 8x + 6y$ pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear: $2x + y \geq 30$, $x + 2y \geq 24$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ adalah ... .

A. 192
B. 180
C. 142
D. 132
E. 72

18. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 2y & 3z \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2y+3z & 2x+4 \\ x & y+7 \end{pmatrix}$. Jika $2A = B^t$, maka nilai x, y, dan z masing-masing adalah ... .

A. 2, 5, dan 8
B. 5, 2, dan 8
C. 5, 8, dan 2
D. 8, 5, dan 2
E. 8, 2, dan 5

19. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$. Jika $A = B^{-1}$, maka nilai x dan y masing-masing adalah ... .

A. 4 dan –2
B. 3 dan 5
C. 4 dan 4
D. –2 dan 4
E. –4 dan –4

20. Diketahui sistem persamaan linear:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Nilai x dan y dari sistem persamaan linear di atas adalah ... .

A. 5 dan 3
B. 3 dan 5
C. –3 dan 5
D. –5 dan –3
E. –3 dan –5

21. Diketahui persamaan garis g_1: $2x - y - 5 = 0$ dan g_2: $3x - y - 7 = 0$. Kedua garis tersebut berpotongan di titik ... .

A. (2,1)
B. (–2,1)
C. (2,–1)
D. (–2,–1)
E. (2,3)

22. Nilai a agar matriks $A = \begin{pmatrix} a+2 & 2 \\ a-1 & a-3 \end{pmatrix}$ merupakan matriks singular adalah ... .

A. –2 atau 3
B. 2 atau –3
C. 1 atau 4
D. –1 atau 4
E. 1 atau –4

23. Jika matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$, maka det(2$A$) = ...

A. 240
B. 480
C. –240
D. 720
E. 1.920

24. Nilai k agar matriks A berikut merupakan matriks singular adalah ... .

$$A = \begin{pmatrix} k-6 & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 4 & k-2 \end{pmatrix}$$

A. 2 atau 6
B. –2 atau 6
C. 2 atau –6
D. –2 atau –6
E. –2, 2, atau 6

25. Diketahui persamaan berikut.

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ x-2 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+5 & -x \\ x & 1 \end{vmatrix}$$

Nilai x yang memenuhi persamaan di atas adalah ... .

A. $x_1 = -1$ atau $x_2 = 3$
B. $x_1 = -1$ atau $x_2 = -3$
C. $x_1 = -2$ atau $x_2 = 3$
D. $x_1 = 1$ atau $x_2 = -3$
E. $x_1 = 1$ atau $x_2 = 3$

26. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 2y & 3z \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2y+3z & 2x+4 \\ x & y+7 \end{pmatrix}$. Jika $2A = B^t$, maka nilai x, y, dan z masing-masing adalah ... .

A. 2, 5, dan 8
B. 5, 2, dan 8
C. 5, 8, dan 2
D. 8, 5, dan 2
E. 8, 2, dan 5

27. Perusahaan “Beta Perkasa” memproduksi 2 jenis mesin yaitu jenis A dan jenis B, masing-masing memerlukan dua bahan, yaitu bahan I dan bahan II. Untuk mesin jenis A memerlukan bahan I sebanyak 2 satuan dan bahan II sebanyak 0,25 m. Untuk mesin jenis B memerlukan bahan I sebanyak 1 satuan dan bahan II sebanyak 0,5 satuan. Bahan I tersedia 30 satuan dan bahan II tersedia 12 satuan. Jumlah kedua mesin yang dapat dibuat sebanyak-banyaknya adalah ... .

A. 15
B. 24
C. 28
D. 30
E. 26

28. Setiap bulan seseorang membutuhkan bahan makanan yang mengandung zat kimia jenis A tidak kurang dari 30 satuan dan jenis B tidak kurang dari 24 satuan. Untuk memenuhi kebutuhan tersebut terdapat 2 macam jenis makanan, yaitu makanan jenis M_1 dan M_2. Makanan jenis M_1 setiap 1 kg mengandung 2 satuan zat kimia jenis A dan 2 satuan zat kimia jenis B. Makanan jenis M_2 setiap 1 kg mengandung 2 satuan zat kimia jenis A dan 1 satuan zat kimia jenis B. Harga makanan jenis M_1 adalah Rp8.000,00 per kg dan harga makanan jenis M_2 adalah Rp5.000,00 per kg. Besarnya biaya minimal yang harus dikeluarkan orang tersebut agar kebutuhan zat kimia tersebut terpenuhi adalah ... .

    A. Rp60.000,00
    B. Rp75.000,00
    C. Rp120.000,00
    D. Rp96.000,00
    E. Rp93.000,00

29. Sebuah pesawat udara mempunyai tempat duduk tidak lebih dari 300 penumpang. Setiap penumpang kelas eksekutif boleh membawa barang di bagasi maksimum 60 kg, sedangkan penumpang kelas ekonomi bagasinya dibatasi 20 kg. Pesawat itu hanya dapat membawa bagasi tidak lebih dari 12.000 kg. Bila tiket untuk setiap penumpang kelas eksekutif Rp800.000,00 dan tiket untuk kelas ekonomi Rp500.000,00, maka banyaknya penumpang masing-masing kelas tersebut agar diperoleh pendapatan sebanyak-banyaknya adalah ... .

    A. Rp195.000.000,00
    B. Rp160.000.000,00
    C. Rp150.000.000,00
    D. Rp240.000.000,00
    E. Rp300.000.000,00

30. Diketahui sistem persamaan linear dengan dua variabel:

$$\begin{cases} 5x + 3y = p \\ 6x + 4y = q \end{cases}$$

Penyelesaian dari sistem persamaan linear ini adalah ... .

    A. $x = \frac{1}{2}(-4p + 3q)$ dan $y = \frac{1}{2}(-6p + 5q)$
    B. $x = \frac{1}{2}(4p - 3q)$ dan $y = \frac{1}{2}(-6p + 5q)$
    C. $x = \frac{1}{2}(4p - 3q)$ dan $y = \frac{1}{2}(6p + 5q)$
    D. $x = \frac{1}{2}(4p + 3q)$ dan $y = \frac{1}{2}(-6p + 5q)$
    E. $x = \frac{1}{2}(4p + 3q)$ dan $y = \frac{1}{2}(6p + 5q)$

B. Untuk soal nomor 31 sampai dengan nomor 40, kerjakan dengan langkah-langkah yang tepat!

31. Jika $f(x,y) = 3x + 4y$ dan $g(x,y) = 4x + 3y$ serta x, y adalah bilangan-bilangan real nonnegatif, tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi f dan g pada masing-masing sistem pertidaksamaan linear berikut.
    a. $2x + 3y \leq 12$, $x + 6y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
    b. $5x + 2y \leq 10$, $2x + 5y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

32. Diketahui sistem persamaan linear:
$$\begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$
    a. Nyatakan sistem persamaan linear ini dalam bentuk persamaan matriks.
    b. Selesaikan persamaan matriksnya dengan menggunakan invers matriks.

33. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Tentukan:
    a. AB
    b. $(AB)^t$
    c. $B^t A^t$
    d. $A^{-1} B^{-1}$
    e. $B^{-1} A^{-1}$

34. Luas daerah parkir adalah 100 m^2. Luas rata-rata untuk sebuah mobil 10 m^2 dan untuk sebuah bis 20 m^2. Daerah parkir tersebut tidak boleh menampung lebih dari 8 kendaraan. Jika tarif parkir untuk mobil dan bis masing-masing adalah Rp3.000,00 dan Rp5.000,00, hitunglah banyaknya mobil dan bis masing-masing harus parkir agar diperoleh pendapatan maksimum dan tentukan pendapatan maksimum tersebut.

35. Seorang petani menginginkan tanamannya tidak terserang hama. Agar keinginannya tersebut terlaksana, tanaman tersebut harus diberi pupuk yang mengandung unsur kimia jenis U, V, dan W masing-masing paling sedikit 24, 22, dan 36 satuan unsur kimia tersebut. Dua jenis pupuk P dan Q diberikan pada tanaman tersebut. Satu kg pupuk jenis P mengandung unsur kimia jenis U, V, dan W masing-masing sebesar 2, 1, dan 1 satuan. Sedangkan satu kg pupuk jenis Q mengandung unsur kimia jenis U, V, dan W masing-masing sebesar 1, 1, dan 2 satuan. Harga satu kg pupuk jenis P dan Q masing-masing adalah Rp8.000,00 dan Rp6.000,00. Tentukan biaya minimum yang dikeluarkan petani agar keinginannya tercapai.

36. Althof, Rizqa, dan Nadia bermain kelereng. Jumlah kelereng ketiga anak tersebut adalah 75. Jumlah kelereng Althof dan Rizqa dikurangi kelereng Nadia adalah 45, sedangkan jumlah kelereng Althof dan Nadia adalah 50.
    a. Buatlah model matematika untuk persoalan ini.
    b. Dengan menggunakan cara determinan, selesaikan sistem persamaan linear yang telah diperoleh dari *a*.
    c. Berapakan masing-masing kelereng Althof, Rizqa, dan Nadia?

37. Seorang anak ingin membeli buku, bolpoin, dan pensil. Jika dia membeli 2 buku, 3 bolpoin, dan 1 pensil, maka dia harus membayar Rp11.000,00. Jika dia membeli 1 buku, 4 bolpoin, dan 2 pensil, maka dia harus membayar Rp12.500,00, sedangkan jika dia membeli 3 buku, 2 pensil, dan 2 bolpoin, maka dia harus membayar Rp15.500,00.
    a. Buatlah model matematika untuk persoalan di atas dalam bentuk sistem persamaan linear.
    b. Dengan menggunakan cara determinan, selesaikan sistem persamaan linear yang telah diperoleh.
    c. Berapakah harga 1 buah buku, 1 buah bolpoin, dan 1 buah pensil?

38. Agus, Aulia, dan Endra menabung uang di sebuah bank. Jumlah tabungan ketiga anak tersebut adalah Rp2.000.000,00. Jumlah tabungan Agus dan Aulia adalah Rp1.500.000,00, sedangkan jumlah tabungan Aulia dan Endra adalah Rp1.000.000,00.
    a. Buatlah model matematika untuk persoalan ini dalam bentuk sistem persamaan linear.
    b. Dengan menggunakan cara determinan, selesaikan sistem persamaan linear yang telah diperoleh.
    c. Berapakah masing-masing tabungan Agus, Aulia, dan Endra?

39. Diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ dan } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    a. Tentukan bilangan real k sedemikian hingga matriks $kI - A$ mempunyai invers.
    b. Tentukan bilangan real k sedemikian hingga matriks $kI - A$ tidak mempunyai invers.

40. Tentukan nilai x dan y yang memaksimumkan fungsi tujuan: $f(x,y) = 5x + 4y$ pada daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan: $3x + y \leq 15$, $x + y \leq 9$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$.

BAB III

BARISAN DAN DERET

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan dapat:
1. menentukan suku ke-n barisan dan jumlah n suku deret aritmetika dan geometri,
2. merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan deret,
3. menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan deret dan penafsirannya.

Pengantar

Sumber: serpong.files.wordpress

Gambar 3.1 Perumahan

Jika Anda punya tabungan, maka Anda ingin mengetahui berapa besar tabungan Anda pada akhir tahun. Juga apabila orang tua Anda mengambil kredit untuk perumahan atau kendaraan, tentunya Anda ingin mengetahui berapa besar angsuran dan sisa kredit setelah selama waktu tertentu. Agar Anda dapat menyelesaikan persoalan-persoalan di atas, maka Anda harus memahami isi dari bab ini dengan baik.

Setelah mempelajari bab ini, Anda diharapkan dapat memahami sifat-sifat barisan dan deret aritmetika serta barisan dan deret geometri, yang selanjutnya dapat merumuskan masalah-masalah nyata yang model matematikanya berbentuk deret, menyelesaikan modelnya, dan menafsirkan hasil yang diperoleh.

Untuk menunjang pencapaian tujuan tersebut di atas, di dalam bab ini akan disajikan berturut-turut pengertian barisan dan deret, barisan aritmetika, deret aritmetika, pengertian barisan geometri, deret geometri, dan deret geometri tak hingga, notasi sigma, dan pembuktian dengan induksi matematika. Sebagai prasyarat untuk mempelajari bab ini, Anda harus paham operasi-operasi pada sistem bilangan real beserta sifat-sifatnya.

3.1 Pengertian Barisan dan Deret

Apabila kita berkendaraan di jalan yang menghubungkan dua kota besar sering dijumpai tugu-tugu kecil yang ditulisi suatu bilangan yang menujukkan jarak antara tempat tugu itu berada dengan kota yang akan kita tuju. Bilangan tersebut akan berkurang satu setiap kita menempuh jarak satu kilometer.

Demikian juga, jika kita berjalan-jalan di suatu perumahan, maka kita akan menjumpai barisan bilangan yang menunjukkan nomor rumah. Sering didapati nomor-nomor genap untuk rumah-rumah di sebelah kanan jalan dan nomor-nomor ganjil untuk rumah-rumah di sebelah kiri jalan. Nomor-nomor tersebut menunjukkan adanya susunan bilangan yang disusun menurut aturan tertentu. Jika diperhatikan nomor-nomor rumah di sebelah kanan jalan, maka didapat bahwa nomor pertama adalah 2, nomor yang ke dua adalah 4, nomor ke tiga adalah 6, dan seterusnya. Dengan demikian terdapat suatu pemetaan antara bilangan asli dengan bilangan genap.

Di dalam subbab ini akan dibahas suatu fungsi khusus yang daerah asalnya himpunan bilangan asli $(\mathbb{N})$ dan daerah hasilnya adalah himpunan bagian (subset) dari himpunan bilangan real $(\mathbb{R})$.

> **Definisi 3.1**
>
> Yang dimaksud dengan barisan bilangan real adalah suatu fungsi yang daerah asalnya himpunan bilangan asli dan daerah hasilnya adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

Dengan kata lain, barisan bilangan real adalah susunan bilangan real yang dibentuk menurut aturan tertentu. Jelas aturan tententu yang dimaksud adalah definisi dari fungsinya.

Sekarang perhatikan suatu fungsi yang dirumuskan sebagai berikut.

$$f(\cdot) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\text{ , dengan } f(n) = 3n + 1$$

Untuk:

$$\begin{aligned}
n &= 1 \to f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4\\
n &= 2 \to f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7\\
n &= 3 \to f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10\\
&\vdots\\
n &= n \to f(n) = 3n + 1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Jadi, untuk $n = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ kita mendapatkan nilai fungsi $f(1), f(2), f(3), \ldots f(n), \ldots$ atau dalam hal ini $4, 7, 10, \ldots, (3n + 1), \ldots$. Untuk selanjutnya, penulisan nilai fungsi $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$, sering dituliskan dengan notasi $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$. Susunan bilangan di atas merupakan contoh suatu barisan. Untuk barisan di atas, diketahui bahwa suku ke-1 adalah $f_1 = 4$, suku ke-2 adalah $f_2 = 7$, suku ke-3 adalah $f_3 = 10, \ldots$, suku ke-n adalah $f_n = 3n + 1$.

Terdapat beberapa metode untuk menggambarkan suatu barisan, antara lain:

1. Metode pertama dengan mendaftar beberapa suku pertama hingga aturan untuk menentukan suku berikutnya jelas. Sebagai contoh, barisan (7, 11, 15, 19, 23, ...) adalah barisan yang suku ke-n-nya adalah $(4n + 3)$, sedangkan barisan (1, 2, 4, 8, ...) adalah barisan yang suku ke-n-nya adalah 2^{n-1}.
2. Metode kedua adalah dengan menuliskan rumus untuk suku ke-n dari barisannya. Sebagai contoh, untuk barisan (3, 5, 7, 9, ...) dapat dituliskan sebagai (u_n) dengan $u_n = 2n + 1$ atau dapat dituliskan dengan $(2n + 1)$.
3. Metode ketiga adalah dengan memberikan n suku pertamanya, dan suku ke-$(n + 1)$ ditentukan sebagai fungsi dari n suku pertamanya. Sebagai contoh, untuk barisan bilangan Fibonacci diberikan oleh (u_n) dengan $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, dan $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ untuk $n \geq 2$. Jika dituliskan dengan cara mendaftar barisan Fibonacci ini dapat dituliskan dengan (1, 1, 2, 3, 5, ...). Dengan kata lain, barisan Fibonacci adalah barisan bilangan yang setiap suku sesudah suku kedua merupakan jumlah dari dua suku yang mendahuluinya.

Karena pada dasarnya barisan merupakan fungsi, maka kita mempunyai definisi untuk kesamaan dua barisan.

Definisi 3.2

Dua barisan, (u_n) dan (v_n), dikatakan sama, ditulis dengan $(u_n) = (v_n)$, jika $u_n = v_n$ untuk semua bilangan asli n.

Untuk barisan tak hingga (u_n), kita akan memperhatikan jumlah dari semua suku dari barisan tak hingga (u_n).

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Definisi 3.3

Jika (u_n) merupakan suatu barisan bilangan real, maka bentuk:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

disebut deret tak hingga. Bilangan u_n disebut suku ke-n dari deret dan bilangan:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

disebut jumlah n buah suku pertama dari deret.

Untuk memahami pengertian barisan dan deret lebih mendalam, berikut ini diberikan beberapa contoh barisan dan deret.

Contoh 3.1.1

Jika diberikan suatu susunan bilangan

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

maka susunan bilangan ini merupakan barisan dengan suku umum (suku ke-n) adalah $\frac{1}{n}$, sedangkan bentuk jumlahan bilangan-bilangan ini adalah:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

adalah suatu deret tak hingga, dengan suku ke-n adalah $\frac{1}{n}$ dan jumlah n buah suku pertama adalah:

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

Jadi, untuk deret ini diperoleh suku ke-15 adalah $\frac{1}{15}$, dan jumlah 15 buah suku pertama adalah:

$$S_{15} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{15}$$

□

Contoh 3.1.2

Jika diberikan susunan bilangan: 1, –1, 1, –1, 1, –1, ... , maka susunan bilangan ini merupakan barisan dan bentuk: 1 + (–1) + 1 + (–1) + 1 + (–1) + ... adalah suatu deret tak hingga dengan suku ke-n adalah 1 jika n ganjil dan –1 jika n genap, dan jumlah n suku pertama adalah 0 jika n genap dan 1 jika n ganjil.

□

Contoh 3.1.3

Tuliskan tiga suku lagi dari setiap barisan yang diberikan berikut ini, kemudian tentukan rumus suku ke-n.

a. 5, 7, 9, ... b. 1, 10, 100, … c. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots$

Penyelesaian:

a. Tiga suku berikutnya dari barisan tersebut adalah 11, 13, 15, sedangkan rumus untuk suku ke-n adalah $u_n = 2n + 3$.
b. Tiga suku berikutnya untuk barisan tersebut adalah 1.000, 10.000, 100.000, sedangkan rumus untuk suku ke-n adalah $u_n = 10^{n-1}$.
c. Tiga suku berikutnya untuk barisan tersebut adalah $\frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$, sedangkan rumus untuk suku ke-n adalah $u_n = \frac{1}{2n}$.

□

Contoh 3.1.4

Tuliskan tiga suku pertama dari barisan yang diketahui rumus suku ke-n berikut ini.

a. $u_n = 3n+1$ b. $u_n = n^2 - 1$ c. $u_n = n(n+1)$

Penyelesaian:

a. Diketahui $u_n = 3n+1$, maka diperoleh:
$$u_1 = 3(1) + 1 = 4,\ u_2 = 3(2) + 1 = 7, \text{ dan } u_3 = 3(3) + 1 = 10.$$
b. Diketahui $u_n = n^2 - 1$, maka diperoleh:
$$u_1 = (1)^2 - 1 = 0,\ u_2 = (2)^2 - 1 = 3, \text{ dan } u_3 = (3)^2 - 1 = 8.$$
c. Diketahui $u_n = n(n+1)$, maka diperoleh:
$$u_1 = 1(1 + 1) = 2,\ u_2 = 2(2 + 1) = 6, \text{ dan } u_3 = 3(3 + 1) = 12.$$

□

Contoh 3.1.5

Rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $u_n = n^2 - 2n$.

a. Tuliskan tiga suku pertamanya.
b. Bilangan 48 merupakan suku yang ke berapa?

Penyelesaian:

a. Diketahui $u_n = n^2 - 2n$, maka diperoleh:

$$u_1 = (1)^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$$
$$u_2 = (2)^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$$
$$u_3 = (3)^2 - 2(3) = 9 - 6 = 3$$

b. Diketahui $u_n = 48$, berarti $n^2 - 2n = 48$ atau $n^2 - 2n - 48 = 0$. Dengan cara pemfaktoran diperoleh $(n + 8)\,(n - 6) = 0$. Ini berarti, $n = -8$ atau $n = 6$. Karena n suatu bilangan asli, maka diperoleh $n = 6$.
Jadi, 48 adalah suku ke-6.

□

Latihan 3.1

1. Tuliskan tiga suku berikutnya dari barisan bilangan berikut ini.
   a. 5, 15, 25, 35, ...
   b. 150, 125, 100, 75, ...
   c. 1, –1, 1, –1, ...
   d. 2, 3, 5, 8, 12, ...
   e. 1, 4, 9, 25, ...
   f. 1, 2, 4, 8, 16, ...
2. Tuliskan tiga suku berikutnya dari barisan Fibonacci berikut ini.
   a. 3, 5, 8, 13, ...
   b. 0, 1, 1, 2, ...
   c. 1, –1, 0, –1, ...
   d. 5, 10, 15, 25, ...
   e. 2, 7, 9, 16, ...
   f. –5, 5, 0, 5, ...
3. Tuliskan rumus suku ke-n dari barisan berikut ini.
   a. 6, 11, 16, 21, ...
   b. 0, 2, 6, 12, ...
   c. 4, 8, 12, 16, ...
   d. 2, 5, 10, 17, ...
   e. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$
   f. 0, 1, 0, 2, ...
4. Diketahui barisan dengan rumus suku ke-n adalah $u_n = n^2 + 2n + 1$.
   a. Tuliskan empat suku pertamanya.
   b. Bilangan 100 merupakan suku yang ke berapa dari barisan tersebut?
5. Diketahui barisan dengan rumus suku ke-n adalah $u_n = 3^{n-1}$.
   a. Tuliskan empat suku pertamanya.
   b. Bilangan 243 merupakan suku yang ke berapa dari barisan tersebut?
6. Dari barisan yang dituliskan rumus suku ke-n berikut ini, tentukan u_1, u_{10}, dan u_{2n}.
   a. $u_n = 4n + 3$
   b. $u_n = 5n - 3$
   c. $u_n = n^2 - 3n$
   d. $u_n = 2^{n+1}$
   e. $u_n = \frac{1}{n^2}$
   f. $u_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$

7. Diketahui barisan dengan rumus suku ke-n adalah $u_n = 2n^2 - 16n$.
   a. Tuliskan empat suku pertamanya.
   b. Suku ke berapakah sama dengan nol?
   c. Tentukan S_1, S_3, dan S_5. (Ingat: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$)
8. Diketahui barisan dengan rumus suku ke-n adalah $u_n = 2^{n-1} - 3n$.
   a. Tuliskan empat suku pertamanya.
   b. Mungkinkan barisan tersebut mempunyai suku nol?
   c. Tentukan S_1, S_3, dan S_5.
9. Dengan menggunakan paket komputer pengolah angka *MS Excel*, tentukan suku ke-1 sampai suku ke-100 dari barisan yang suku ke-n dinyatakan dalam bentuk:

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

   Kemudian tentukan juga jumlah 100 suku pertama.
10. Gunakan komputer pengolah angka *MS Excel* untuk membuat data barisan $\left(\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right)$, dan kemudian tentukan bilangan asli k sehingga setiap $n \geq k$, berlaku $x_n \leq 0{,}0001$.

3.2 Barisan Aritmetika

Di dalam subbab sebelumnya telah dijelaskan pengertian barisan dan deret, sekarang kita akan membahas barisan yang mempunyai sifat-sifat khusus, yang akan disebut dengan barisan aritmetika.

Definisi 3.4

Suatu barisan u_1, u_2, u_3, ... , u_n, ... disebut barisan aritmetika, jika dipenuhi $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = ... = u_n - u_{n-1} = ...$. Selisih yang tetap ini disebut beda (b) dari barisan arimatika, berarti $b = u_n - u_{n-1}$.

Dengan kata lain, barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang mempunyai selisih atau beda antara suku-suku yang berurutan tetap. Barisan aritmetika sering juga disebut barisan hitung. Berikut ini diberikan beberapa contoh barisan aritmetika dan barisan yang bukan barisan aritmetika.

Contoh 3.2.1

Barisan 2, 4, 6, 8, ... merupakan barisan aritmetika karena $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = ...$ dengan beda $b = u_2 - u_1 = 2$. Barisan 125, 120, 115, 110, ... juga merupakan barisan aritmetika dengan beda, $b = 120 - 125 = -5$. Tetapi, barisan 1, 0, 1, 0, ... bukan merupakan barisan aritmetika karena $u_2 - u_1 = -1$ tidak sama dengan $u_3 - u_2 = 1$. Demikan juga barisan 1, 2, 4, 7, 11, ... bukan barisan aritmetika karena $u_2 - u_1 = 1$ tidak sama dengan $u_3 - u_2 = 2$.

□

Berdasarkan definisi di atas, jika $u_1 = a$, maka bentuk umum dari suatu barisan aritmetika dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} u_1 &= a \\ u_2 &= a+b \\ u_3 &= a+2b \\ u_4 &= a+3b \\ &\vdots \\ u_n &= a+(n-1)b \end{aligned}$$

dengan suku ke-n adalah $u_n = a+(n\text{-}1)b$. Karena $a = u_1$, maka bentuk umum suku ke-n adalah:

$$u_n = u_1 + (n-1)b$$

Apabila banyak sukunya berhingga, maka kita dapat menentukan sifat-sifat yang lebih khusus, yaitu jika banyak sukunya ganjil, maka banyak sukunya dapat dinyatakan dengan $(2n+1)$, untuk suatu bilangan asli n. Akibatnya, kita dapat menentukan suku tengahnya, yaitu:

$$u_t = u_{n+1} = u_1 + nb = \frac{1}{2}(u_1 + u_{2n+1})$$

Sedangkan jika banyak sukunya genap, maka banyak sukunya dapat dinyatakan dengan $2n$, untuk suatu bilangan asli n, dan untuk kasus ini diperoleh hubungan:

$$u_1 + u_{2n} = u_2 + u_{2n-1} = \ldots = u_n + u_{n+1}$$

Berikut ini diberikan beberapa contoh menentukan suku ke-n barisan aritmetika jika diketahui suku pertama dan bedanya.

Contoh 3.2.2

Tentukan suku ke-51 dari barisan aritmetika: –3, 1, 5, 9, ...

Penyelesaian:

Dari barisan aritmetika yang diberikan diketahui bahwa $u_1 = a = -3$ dan $b = 1 - (-3) = 4$. Suku ke-51 dapat ditentukan sebagai berikut.

$$u_{50} = u_1 + (51-1)\,4 = -3 + 200 = 197$$

□

Contoh 3.2.3

Diberikan suatu barisan aritmetika: 126, 120, 114, ... Suku yang ke berapakah merupakan bilangan nol?

Penyelesaian:

Dari barisan yang diberikan diketahui $u_1 = 126$ dan $b = 120 - 126 = -6$. Jika diketahui $u_n = 0$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} u_n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad u_1 + (n-1)b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 126 + (n-1)(-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 126 - 6n + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 6n = 132 \\ &\Leftrightarrow \quad n = \frac{132}{6} = 22 \end{aligned}$$

Jadi, suku ke-22 adalah bilangan nol atau $u_{22} = 0$.

□

Contoh 3.2.4

Dari suatu barisan aritmetika yang banyak sukunya ganjil diketahui bahwa $u_5 = 18$, $u_t = 14$, dan suku yang terakhir adalah 26. Tentukan banyak suku dan barisan tersebut.

Penyelesaian:

Karena banyak sukunya ganjil, maka banyak sukunya dapat dinyatakan dengan $(2n + 1)$, sehingga suku terakhirnya dapat dituliskan dengan $u_{2n+1} = a + 2nb$ dan suku tengahnya dapat dituliskan: $u_t = a + nb$. Akibatnya, diperoleh hubungan-hubungan:

$$\begin{array}{rl} a + 2nb & = 26 \\ \underline{2a + 2nb} & \underline{= 28} \; - \\ -a \qquad & = -2 \end{array}$$

Diperoleh $a = 2$. Selanjutnya dari $u_5 = 18$, diperoleh $a + 4b = 18$ dan akibatnya $4b = 18 - 2$ atau $b = 4$. Kemudian dari $a + nb = 14$, diperoleh $2 + 4n = 14$ atau $n = 3$. Jadi, banyak suku dari barisan tersebut adalah $2 \cdot 3 + 1 = 7$ dan barisan tersebut adalah:

$$2, 6, 10, 14, 18, 22, 26$$

□

Contoh 3.2.5

Diketahui bahwa tiga bilangan membentuk tiga suku pertama dari suatu barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan tersebut adalah 24 dan hasil kalinya 440. Tentukan bilangan-bilangan itu.

Penyelesaian:

Misalkan bilangan-bilangan itu adalah $p - b, p, p + b$.

Dari soal, diketahui:

(i) $(p - b) + p + (p + b) = 24 \;\Leftrightarrow\; 3p = 24$

$\Leftrightarrow\; p = 8$

(ii) $(p - b)(p)(p + b) = 440 \;\Leftrightarrow\; p(p^2 - b^2) = 440$

$\Leftrightarrow\; 8(64 - b^2) = 440$

$\Leftrightarrow\; 64 - b^2 = 55$

$\Leftrightarrow\; b^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow\; (b - 3)(b + 3) = 0$

$\Leftrightarrow\; b = 3$ atau $b = -3$

Untuk $p = 8$ dan $b = 3$, diperoleh barisan aritmetika 5, 8, 11, ...

Untuk $p = 8$ dan $b = -3$, diperoleh barisan aritmetika 11, 8, 5, ...

□

Tugas Kelompok

Pada Contoh 3.2.5, kita juga dapat memisalkan tiga bilangannya adalah $a, a + b, a + 2b$, tetapi perhitungannya tidak akan sederhana jika kita memisalkan $p - b, p, p + b$ (Silakan diskusi dengan teman Anda). Anda dapat juga memisalkan tiga bilangan tersebut adalah x, y, dan z, tetapi pemisalan ini akan menghasilkan perhitungan yang lebih rumit lagi. Dari kasus ini dapat dimengerti bahwa tiga bilangan, s, t, dan u, membentuk barisan aritmetika jika berlaku $2t = s + u$. Dengan cara yang sama, empat bilangan, s, t, u, dan v, membentuk barisan aritmetika jika berlaku $s + u = t + v$ (Buktikan dalam kelompok diskusi Anda).

Latihan 3.2

1. Selidikilah apakah barisan berikut ini merupakan barisan aritmetika atau bukan (berikan penjelasan).
   a. 1, 3, 5, 7, ...
   b. 4, 7, 10, 13, ...
   c. 50, 40, 30, 20, ...
   d. 1, 0, 1, 0, ...
   e. 1, 4, 9, 16, ...
   f. –5, –1, 3, 7, ...

2. Tentukan beda dari barisan aritmetika berikut ini.
   a. 4, 9, 14, 19, ...
   b. –8, –5, –2, 1, ...
   c. 5, 1, –3, –7, ...
   d. 75, 100, 125, 150, ...
   e. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \ldots$
   f. $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

3. Tuliskan rumus umum suku ke-n dari barisan aritmetika yang disajikan pada no. 2.

4. Tentukan suku ke-10 dan suku ke-15 dari masing-masing barisan aritmetika berikut.
   a. 7, 10, 13, 16, ...
   b. –5, –3, –1, 1, ...
   c. 15, 10, 5, 0, ...
   d. $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$
   e. $3a, 5a, 7a, 9a, \ldots$
   f. $p+q, p+3q, p+5q, p+7q, \ldots$

5. Dari suatu barisan aritmetika diketahui bahwa suku ke-8 adalah 25 dan suku ke-12 adalah 45. Tentukan suku pertama dan beda dari barisan tersebut, kemudian tentukan juga barisannya.

6. Dari suatu barisan aritmetika diketahui bahwa suku ke-5 adalah 32 dan suku ke-10 adalah 12. Tentukan suku ke-20 dari barisan aritmetika tersebut.

7. Diketahui bahwa tiga bilangan membentuk tiga suku pertama dari suatu barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan tersebut adalah 60 dan hasil kalinya 7.500. Tentukan bilangan-bilangan itu.

8. Suku ke-5 dari suatu barisan aritmetika adalah 16, jumlah tiga suku pertamanya adalah 21. Tentukan beda dan suku ke-10 dari barisan tersebut.

9. Tentukan x apabila bilangan-bilangan berikut membentuk suatu barisan aritmetika.
   a. $x - 2$, $x + 1$, dan $5x$
   b. $3x - 1$, $3x + 1$, dan $4x - 3$
   c. $2x^2 + 1$, $3x^2 - 1$, dan $5x^2 - x + 3$

10. Dalam sebuah barisan aritmetika diketahui $u_1 = 3$, $u_n = 87$, dan $u_6 + u_7 = 39$. Tentukan beda (b), n, dan u_{50}.

3.3 Deret Aritmetika

Di dalam subbab sebelumnya telah dijelaskan beda antara barisan dan deret, juga telah dibahas barisan aritmetika. Pada subbab ini akan dibahas deret aritmetika atau deret hitung dengan banyak suku hingga. Dalam hal ini akan dihitung jumlah ke-n dari suatu deret aritmetika, sehingga kita hanya menghitung jumlah n suku pertama, S_n.

Definisi 3.5

Jika $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ merupakan barisan aritmetika, maka bentuk: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ disebut deret aritmetika. Jika jumlah ke-n dari deret tersebut dinotasikan dengan S_n, maka $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

Jika suku pertama, $u_1 = a$ dan beda dari deret aritmetika tersebut $b = u_2 - u_1$, maka S_n dapat dituliskan sebagai:

$$
\begin{array}{lrl}
 & S_n = & a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + (a+(n-2)b) + (a+(n-1)b) \\
\text{atau} & S_n = & (a+(n-1)b) + (a+(n-2)b) + (a+(n-3)b) + \ldots + (a+b) + a \\
\hline
 & 2S_n = & 2a+(n-1)b+2a+(n-1)b+2a+(n-1)b+ \ldots +2a+(n-1)b+2a+(n-1)b \quad + \\
 & = & n\{2a+(n-1)b\}
\end{array}
$$

Jadi,

$$S_n = \frac{n}{2}\{a + a + (n-1)b\} \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}\{u_1 + u_n\}$$

Dengan cara seperti di atas, juga diperoleh:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$$
$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa

$$S_n - S_{n-1} = u_n$$

Contoh 3.3.1

Tentukan suku ke-26 dan jumlah ke-26 dari deret aritmetika berikut.

$$5 + 8 + 11 + 14 + \ldots$$

Penyelesaian:

Dari deret aritmetika tersebut diketahui bahwa $a = 5$, $b = 8 - 5 = 3$, dan $n = 26$, sehingga diperoleh $u_{26} = a + (26-1)b = 5 + 25(3) = 5 + 75 = 80$.

Akibatnya,

$$S_{26} = \frac{26}{2}\{u_1 + u_{26}\} = 13(5 + 80) = 13(85) = 1.105$$

□

Contoh 3.3.2

Tentukan jumlah semua bilangan bulat di antara 50 dan 500 yang habis dibagi 6.

Penyelesaian:

Bilangan-bilangan tersebut adalah 54, 60, 66, 72, ... , 492, 498.

Jadi, yang ditanyakan adalah $S_n = 54 + 60 + 66 + 72 + \ldots + 492 + 498$.

Dari deret ini, diperoleh suku pertamanya $a = 54$, $u_n = 498$, dan beda $b = 60 - 54 = 6$.

Dari hubungan $u_n = a + (n-1)b$, diperoleh $498 = 54 + (n-1)6$ atau $6n = 450$, sehingga banyaknya suku adalah $n = 75$.

Jadi,

$$S_{75} = \frac{75}{2}(54 + 498) = 75(276) = 20.700$$

□

Contoh 3.3.3

Dalam sebuah deret aritmetika diketahui bahwa suku ke-3 adalah 21, jumlah suku ke-5 dan ke-7 adalah 30. Tentukan jumlah 10 suku yang pertama.

Penyelesaian:

Dari yang diketahui, diperoleh hubungan:

$$\begin{array}{llllll} u_3 = 21 & \Leftrightarrow & a + 2b = 21 & \Leftrightarrow & 2a + 4b = 42 & \\ u_5 + u_7 = 30 & \Leftrightarrow & (a + 4b) + (a + 6b) = 30 & \Leftrightarrow & \underline{2a + 10b = 30} & - \\ & & & & -6b = 12 \text{ atau } b = -2 & \end{array}$$

Selanjutnya, diperoleh $a + 2b = 21$ atau $a = 21 + 4 = 25$.

Jumlah sepuluh suku yang pertama adalah:

$$S_{10} = (10)\{25 + 25 + (10 - 1)(-2)\} = 5(50 - 18) = 5(32) = 160$$

□

Contoh 3.3.4

a. Carilah jumlah bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 9.
b. Carilah juga jumlah bilangan asli antara 1 dan 100 yang tidak habis dibagi 9.

Penyelesaian:

a. Bilangan-bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 9 adalah:

$$9, 18, 27, \ldots, 99$$

Bilangan-bilangan itu membentuk barisan aritmetika dan apabila dijumlahkan akan membentuk deret aritmetika. Dalam hal ini, diketahui $a = 9$, $b = 9$, dan $u_n = 99$, dengan u_n suku terakhir. Langkah pertama harus dicari lebih dahulu banyaknya bilangan atau n.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} u_n = 99 &\Leftrightarrow a + (n-1)b = 99 \\ &\Leftrightarrow 9 + (n-1)9 = 99 \\ &\Leftrightarrow 9n = 99 \\ &\Leftrightarrow n = 11 \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya bilangan antara 1 dan 100 yang habis dibagi 9 adalah 11.

Akibatnya dengan menggunakan rumus jumlah n suku pertama, diperoleh:

$$S_{11} = \frac{11}{2}\{9 + 99\} = (11)(54) = 594$$

Jadi, diperoleh $9 + 18 + 27 + \ldots + 99 = 594$.

b. Jumlah bilangan-bilangan asli antara 1 dan 100 yang tidak habis dibagi 9 adalah:

$$S_n = (2 + 3 + 4 + \ldots + 99) - (9 + 18 + 27 + \ldots + 99)$$

Kita telah menghitung di bagian (a) bahwa:

$$9 + 18 + 27 + \ldots + 99 = 594$$

Sekarang misalkan $2 + 3 + 4 + \ldots + 99 = p$. Perhatikan bahwa jumlahan tersebut merupakan deret aritmetika dengan suku pertama 2, beda 1, dan suku terakhir 99.

Jumlah dari deret tersebut adalah:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} n(a + u_n) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 98\,(2 + 99) \\ &= (49)\,(101) \\ &= 4.949 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah bilangan-bilangan asli antara 1 dan 100 yang tidak habis dibagi 9 adalah:

$$S_n = (2 + 3 + 4 + \ldots + 99) - (9 + 18 + 27 + \ldots + 99) = 4.949 - 594 = 4.355$$

□

Analisis

1. Suku ke-n dari setiap deret aritmetika merupakan fungsi linear dari n dan jumlah ke-n dari setiap deret aritmetika merupakan fungsi kuadrat dari n. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

   $$u_n = a + (n-1)b$$
   $$= bn + (a-b) \qquad \text{merupakan fungsi linear dari } n$$

   dan

   $$S_n = n\{u_1 + u_n\}$$
   $$= n\{a + bn + (a-b)\}$$
   $$= bn^2 + (a-b)n \qquad \text{merupakan fungsi kuadrat dari } n$$

2. Apabila dalam sebuah barisan suku ke-n merupakan fungsi linear dari n, maka barisan itu merupakan barisan aritmetika.

   Bukti:

   Karena suku ke-n merupakan fungsi linear dari n, maka u_n dapat dinyatakan dalam bentuk: $u_n = pn + q$ dan $u_{n-1} = p(n-1) + q$. Akibatnya, $u_n - u_{n-1} = p$. Jadi, selisih dua suku yang berurutan tak bergantung pada n. Ini berarti, deretnya merupakan deret aritmetika dengan beda, $b = p$.

   □

3. Apabila jumlah suku ke-n merupakan fungsi kuadrat dari n yang tidak mempunyai suku konstanta, maka deret ini merupakan deret aritmetika.

   Bukti:

   Karena S_n merupakan fungsi kuadrat dari n yang tidak mempunyai suku konstanta, maka S_n dapat dinyatakan dalam bentuk:

   $$S_n = pn^2 + qn \quad \text{dan} \quad S_{n-1} = p(n-1)^2 + q(n-1) = p(n^2 - 2n + 1) + qn - q$$

   Akibatnya,

   $$S_n - S_{n-1} = pn^2 + qn - pn^2 + 2pn - p - qn + q = 2pn + (q - p)$$

   Padahal $S_n - S_{n-1} = u_n$.

   Jadi, u_n merupakan fungsi linear dari n, dan berdasarkan catatan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa deretnya merupakan deret aritmetika.

   □

Latihan 3.3

1. Manakah yang merupakan deret aritmetika dari deret berikut ini?
   a. $1 + 2 + 3 + ...$
   b. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...$
   c. $2 + 5 + 8 + ...$
   d. $1 + 1 + 1 + 1 + ...$
   e. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + ...$
   f. $1 + (-1) + 1 + (-1) + ...$

2. Tentukan jumlah setiap deret aritmetika berikut ini.
   a. $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 41$
   b. $5 + 10 + 15 + 20 + ... + 75$
   c. $-9, -6, -3, 0, 3, ... , 30$
   d. $7, 4, 1, -2, ...$ sampai 10 suku
   e. $8, 13, 18, 23, ...$ sampai 12 suku
   f. $1 + 2 + 3 + 4, ...$ sampai 30 suku

3. Tentukan nilai n, jika diketahui:
   a. $1 + 2 + 3 + ... + n = 210$
   b. $2 + 4 + 6 + ... + 2n = 110$
   c. $1 + (-1) + 1 + (-1) + ... + (-1)^{n-1} = 0$
   d. $5 + 10 + 15 + 20 + ... + 5n = 180$

4. Dari suatu deret aritmetika diketahui bahwa suku pertamanya adalah 6, bedanya 4, dan jumlahnya 160.
   a. Tentukan banyaknya suku dari deret aritmetika tersebut.
   b. Tentukan suku terakhirnya.
   c. Tentukan suku ke-15.

5. a. Buatlah daftar bilangan-bilangan kelipatan 3 antara 100 dan 500.
   b. Jika bilangan-bilangan tersebut dijumlahkan akan membentuk deret jenis apa?
   c. Tentukan suku pertama deret tersebut.
   d. Tentukan beda deret tersebut.
   e. Tentukan suku terakhir deret tersebut.
   f. Tentukan banyaknya suku deret tersebut.
   g. Tentukan jumlah bilangan-bilangan tersebut.

6. Carilah jumlah dari:
   a. bilangan asli antara 100 dan 1.000 yang habis dibagi 8
   b. bilangan asli antara 100 dan 1.000 yang tidak habis dibagi 8
   c. bilangan asli antara 100 dan 1.000 yang genap dan habis dibagi 5

7. Dari sebuah deret aritmetika diketahui $S_n = n^2 + 2n$. Hitunglah:
   a. suku pertama dari deret tersebut
   b. beda dari deret tersebut
   c. suku ke-n dari deret tersebut
   d. suku ke-10 dari deret tersebut

8. Seorang pegawai dengan gaji permulaan Rp500.000,00 per bulan dan setiap bulan mendapat kenaikan gaji sebesar Rp5.000,00 selama satu tahun pertama. Tuliskan suatu deret untuk menunjukkan jumlah gaji dalam satu tahun pertama tersebut, dan kemudian hitunglah jumlah deret tersebut.

9. Suatu perusahaan memproduksi 1.000 satuan barang pada tahun pertama. Setiap tahun perusahaan menaikkan produksinya sebesar 200 satuan barang. Hitunglah besarnya produksi pada tahun ke-10, dan kemudian tentukan banyaknya hasil produksi selama 10 tahun tersebut.

10. Suatu perusahaan televisi memproduksi 5.000 unit televisi pada tahun pertama. Perusahaan tersebut setiap tahun mengalami penurunan produksi sebesar 500 unit. Kapan perusahaan tersebut tidak memproduksi lagi?

3.4 Barisan Geometri

Berbeda dengan barisan aritmetika yang mempunyai beda atau selisih yang tetap, berikut ini akan disajikan barisan geometri.

Definisi 3.4.1

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang antara dua suku berurutan mempunyai pembanding (rasio) tetap. Rasio dilambangkan dengan r.

Jika barisan $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ merupakan barisan geometri, maka berlaku:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \cdots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \cdots = \text{konstanta}$$

Konstanta ini yang disebut pembanding (rasio) dari deret geometri tersebut, yang selanjutnya dinotasikan dengan r.

Jika suku pertama, u_1 dari deret geometri dinyatakan dengan a dan rasio dengan r, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} & & u_1 &= a = ar^0 \\ u_2 &= r \cdot u_1 & \Rightarrow \quad u_2 &= r \cdot a = ar^1 \\ u_3 &= r \cdot u_2 & \Rightarrow \quad u_3 &= r \cdot ar = ar^2 \\ u_4 &= r \cdot u_3 & \Rightarrow \quad u_4 &= r \cdot ar^2 = ar^3 \end{aligned}$$

dan seterusnya.

Jadi, bentuk baku barisan geometri adalah:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$$

Bentuk baku suku ke-n dari barisan geometri adalah:

$$u_n = ar^{n-1}$$

dengan:

u_n = suku ke-n
r = rasio
a = suku pertama

Contoh 3.4.1

Diberikan barisan geometri: 4, 8, 16, ... Tentukan rasio (r) dan suku ke-8 (u_8).

Penyelesaian:

Rasio (r) = $\dfrac{u_2}{u_1}$ = 2, sedangkan suku ke-8 (u_8) = $4(2)^7 = 4(128) = 512$.

□

Contoh 3.4.2

Diketahui bahwa suku ke-n dari suatu barisan geometri adalah $u_n = 5 \cdot 2^{n-1}$. Tentukan rasio dari barisan geometri ini, dan kemudian tentukan suku ke-7.

Penyelesaian:

Karena $u_n = 5 \cdot 2^{n-1}$, maka $u_{n-1} = 5 \cdot 2^{n-2}$. Akibatnya, rasio ($r$) = $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = 2$.

Suku pertama dari barisan ini adalah $a = u_1 = 5 \cdot 2^{1-1} = 5 \cdot 1 = 5$, sedangkan suku ke-7 dari barisan geometri ini adalah:

$$u_7 = a \cdot r^{7-1} = 5 \cdot 2^6 = 5(64) = 320$$

□

Contoh 3.4.3

Dari suatu barisan geometri diketahui bahwa suku keempatnya adalah $\dfrac{1}{2}$ dan suku pertamanya adalah 4. Tentukan rasio dan barisan tersebut.

Penyelesaian:

Diketahui $u_1 = a = 4$ dan $u_4 = \dfrac{1}{2}$. Akibatnya, $ar^3 = \dfrac{1}{2}$ atau $4r^3 = \dfrac{1}{2}$.

Jadi, $r^3 = \frac{1}{8}$ atau $r = \frac{1}{2}$. Barisan geometri yang ditanyakan adalah 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, ...

□

Contoh 3.4.4

Tiga buah bilangan merupakan tiga suku pertama dari suatu barisan geometri. Jumlah ketiga bilangan tersebut adalah 28 dan hasil kali tiga bilangan tersebut adalah 512. Tentukan tiga bilangan tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan bilangan-bilangan tersebut adalah:

$$\frac{a}{r}, a, ar$$

Dari yang diketahui, diperoleh:

1. $$\begin{aligned} \frac{a}{r}, a, ar = 512 \iff a^3 &= 512 \\ \iff a^3 &= 8^3 \\ \iff a &= 8 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \frac{a}{r} + a + ar = 28 &\iff \frac{8}{r} + 8 + 8r = 28 \\ &\iff 8 + 8r + 8r^2 = 28r \\ &\iff 8r^2 - 20r + 8 = 0 \\ &\iff 2r^2 - 5r + 2 = 0 \\ &\iff (2r - 1)(r - 2) = 0 \\ &\iff r = \frac{1}{2} \text{ atau } r = 2 \end{aligned}$$

Untuk $a = 8$ dan $r = \frac{1}{2}$, diperoleh tiga bilangan tersebut adalah:

$$16, 8, 4$$

Untuk $a = 8$ dan $r = 2$, diperoleh tiga bilangan tersebut adalah:

$$4, 8, 16$$

□

Catatan:

Perhatikan bahwa dalam Contoh 3.4.4, kita tidak mengambil pemisalan a, ar, ar^2. Siswa yang penasaran tentang hal ini dapat mencoba dengan pemisalan ini, tentu akan diperoleh perhitungan yang tidak sesederhana jika kita memisalkan

$$\frac{a}{r}, a, ar$$

Dengan kasus ini dapat dimengerti bahwa tiga bilangan, a, b, dan c, membentuk barisan geometri jika berlaku $b^2 = ac$ (Bandingkan dengan $a^2 = \frac{a}{r} ar$).

Contoh 3.4.5

Tentukan nilai k agar bilangan $k-3$, $k-1$, dan $2k+1$ membentuk tiga suku pertama dari barisan geometri.

Penyelesaian:

Bilangan $k-3$, $k-1$, dan $2k+1$ membentuk barisan geometri, jika:

$$\begin{aligned}(k-1)^2=(k-3)(2k+1) &\Leftrightarrow k^2-2k+1=2k^2-5k-3\\ &\Leftrightarrow k^2-3k-4=0\\ &\Leftrightarrow (k+1)(k-4)=0\\ &\Leftrightarrow k=-1 \text{ atau } k=4\end{aligned}$$

Untuk $k=-1$, diperoleh barisan geometri: $-4, -2, -1, \ldots$.
Untuk $k=4$, diperoleh barisan geometri: $1, 3, 9, \ldots$.

□

Contoh 3.4.6

Sebuah perusahaan pada tahun pertama memproduksi 1.000 unit barang. Setiap tahun perusahaan tersebut menaikkan produksinya sebesar 25%. Berapakah banyaknya produksi perusahaan tersebut pada tahun ke-5?

Penyelesaian:

Produksi tahun pertama = 1.000 unit.

Produksi tahun kedua adalah $(1.000 + 25\% \times 1.000) = 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)$

Produksi tahun ketiga adalah:

$$1.000\left(1+\frac{1}{4}\right) + 25\% \times 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right) = 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)^2$$

Produksi tahun keempat adalah:

$$\begin{aligned}1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)^2 + 25\% \times 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)^2 &= 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)^2\left(1+\frac{1}{4}\right)\\ &= 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)^3\end{aligned}$$

Produksi tahun kelima adalah:

$$\begin{aligned}1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)^3 + 25\% \times 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)^3 &= 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)^3\left(1+\frac{1}{4}\right)\\ &= 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)^4\end{aligned}$$

Banyaknya produksi perusahaan tersebut membentuk suatu barisan geometri sebagai berikut.

$$1.000,\ 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right),\ 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)^2,\ 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)^3,\ 1.000\left(1+\frac{1}{4}\right)^4,\ \ldots$$

□

Latihan 3.4

1. Tentukan mana yang merupakan barisan geometri dari barisan berikut.
   a. 2, 4, 8, 16, ...
   b. 1, 3, 5, 7, ...
   c. 1.000, 100, 10, 1, ...
   d. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$
   e. –1, 1, –1, 1, ...
   f. $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \ldots$

2. Tentukan rasio dan rumus suku ke-n dari barisan geometri berikut ini.
   a. 128, 64, 32, 16, ...
   b. 1, –1, 1, –1, ...
   c. $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$
   d. 3, –6, 12, –24, ...
   e. 10, 100, 1.000, 10.000, ...
   f. $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, 27\sqrt{2}, \ldots$

3. Tentukan suku pertama, rasio, dan suku ke-10 dari barisan geometri yang disajikan dalam bentuk rumus suku ke-n berikut ini.
   a. $u_n = 3^n$
   b. $u_n = 5 \cdot 2^{n-1}$
   c. $u_n = (-1)^n$
   d. $u_n = 5^{-n}$
   e. $u_n = 10^{n-1}$
   f. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4. Tiga buah bilangan merupakan tiga suku pertama dari suatu barisan geometri. Jumlah ketiga bilangan itu adalah 63 dan hasil kalinya adalah 1.728. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.

5. Tentukan nilai x agar tiga bilangan, $x + 4$, $3x + 3$, dan $7x + 1$, merupakan tiga suku pertama dari suatu barisan geometri, kemudian tentukan suku ke-10 dari barisan tersebut.

6. Diketahui bahwa banyaknya penduduk Indonesia pada tahun 2000 adalah 220 juta. Setiap tahun penduduk Indonesia bertambah 3%. Berapakah banyaknya penduduk Indonesia pada tahun 2010?

7. Sebuah tabungan sebesar Rp1.000.000,00 mendapatkan bunga 10% setiap tahun. Berapakah besarnya tabungan tersebut setelah 10 tahun?

8. Sebuah perusahaan pada tahun pertama memproduksi sebanyak 1.000 unit barang. Setiap tahun perusahaan tersebut mengalami penurunan produksi sebesar 10%. Pada tahun ke berapakah perusahaan tersebut hanya memproduksi kurang dari 100 unit barang?

3.5 Deret Geometri

Seperti halnya deret aritmetika diperoleh dari penjumlahan bilangan-bilangan di dalam barisan aritmetika, definisi untuk deret geometri juga serupa.

Definisi 3.5.1

Jika $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ merupakan barisan geometri, maka bentuk jumlahan: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ disebut deret geometri.

Karena bentuk baku barisan geometri dinyatakan dalam bentuk: $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$, maka bentuk baku untuk deret geometri dinyatakan sebagai:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

Jika jumlah n buah suku pertama deret geometri dinyatakan dengan S_n, maka rumus untuk S_n adalah:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r},\ r \neq 1 \text{ dan } r < 1$$

atau

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1},\ r \neq 1 \text{ dan } r > 1$$

dengan:

S_n : jumlah n buah suku pertama
a : suku pertama
r : rasio
n : nomor suku

Rumus jumlah n buah suku pertama tersebut dapat diturunkan dari perhitungan berikut.

$$\begin{array}{lcl} S_n & = & a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ rS_n & = & \quad\ ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n & = & a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - ar^n \\ (1-r)S_n & = & a(1-r^n) \end{array} \quad -$$

Jadi,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r},\ r \neq 1$$

Apabila pembilang dan penyebut dari $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r},\ r \neq 1$ dikalikan dengan -1, diperoleh:

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1},\ r \neq 1$$

Contoh 3.5.1

Tentukan S_{10} dari deret geometri: 3, 6, 12, 24, ...

Penyelesaian:

Dari yang diketahui, diperoleh bahwa $a = 3$ dan rasio $r = 2$. Jumlah 10 suku pertama dari deret ini adalah:

$$S_{10} = \frac{3(2^{10}-1)}{2-1} = 3(1.024 - 1) = 3.069$$

□

Contoh 3.5.2

Tiga buah bilangan merupakan barisan geometri, yang jumlahnya sama dengan 65. Jika suku tengahnya sama dengan 15, tentukan bilangan-bilangan tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan bilangan-bilangan tersebut adalah a, ar, ar^2. Diketahui bahwa $ar = 15$ dan $a + ar + ar^2 = 65$, akibatnya $a + ar^2 = 50$ dan $a = \dfrac{15}{r}$. Selanjutnya, $\dfrac{15}{r} + 15r = 50$ atau $\dfrac{3}{r} + 3r = 10$.

Jadi, diperoleh persamaan: $3r^2 - 10r + 3 = 0$ atau $(3r - 1)(r - 3) = 0$. Ini berarti, $r = \frac{3}{r}$ atau $r = 3$.

Untuk $r = \frac{3}{r}$, diperoleh barisan geometri: 45, 15, 5.

Untuk $r = 3$, diperoleh barisan geometri: 5, 15, 45.

□

Contoh 3.5.3

Jumlah n suku dari suatu deret adalah $S_n = 5^n - 1$.

a. Tunjukkan bahwa deret tersebut merupakan deret geometri.

b. Tentukan suku pertama, rasio, dan suku ke-5.

Penyelesaian:

a. Dari rumus S_n, diperoleh bahwa:

$$S_n = 5^n - 1 \quad \text{dan} \quad S_{n-1} = 5^{n-1} - 1$$

Dari hubungan $u_n = S_n - S_{n-1}$, diperoleh:

$$u_n = (5^n - 1) - (5^{n-1} - 1) = 5^n - 5^{n-1} = 5^{n-1}(5 - 1) = 4 \cdot 5^{n-1}$$

Akibatnya,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{4 \cdot 5^n}{4 \cdot 5^{n-1}} = 5$$

Karena $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ merupakan bilangan yang tetap, maka deret tersebut merupakan deret geometri.

b. Suku pertama, $u_1 = 4 \cdot 5^0 = 4 \cdot 1 = 4$.

Rasio, $r = \frac{u_n}{u_{n-1}} = 5$.

Suku ke-5, $u_5 = ar^{5-1} = 4 \cdot 5^4 = 4 \cdot 625 = 2.500$.

□

Contoh 3.5.4

Tiap-tiap awal bulan, Ani menabung uang di bank sebesar Rp.100.000,00. Bank tersebut memberikan bunga sebesar 2% setiap bulan. Pada akhir bulan ke-10, semua uang Ani diambil. Berapakah uang Ani tersebut?

Penyelesaian:

Uang Ani pada akhir bulan pertama adalah:

$$\begin{aligned} S_1 &= 100.000 + 2\% \cdot 100.000 \\ &= 100.000\ (1 + 0{,}02) \\ &= 100.000\ (1{,}02) \end{aligned}$$

Uang Ani pada akhir bulan kedua adalah:

$$\begin{aligned} S_2 &= 100.000\ (1{,}02) + 2\% \cdot 100.000\ (1{,}02) \\ &= 100.000\ (1{,}02)\ (1 + 0{,}02) \\ &= 100.000\ (1{,}02 + 1{,}02^2) \end{aligned}$$

Dengan cara serupa diperoleh bahwa uang Ani pada akhir bulan kesepuluh adalah:

$$S_{10} = 100.000\ (1{,}02 + 1{,}02^2 + 1{,}02^3 + 1{,}02^4 + \ldots + 1{,}02^{10})$$

Perhatikan bahwa jumlahan: $1{,}02 + 1{,}02^2 + 1{,}02^3 + \ldots + 1{,}02^{10}$ merupakan deret geometri dengan suku pertama, $a = 1$ dan rasio, $r = 1{,}02$.

Akibatnya,

$$S_{10} = 100.000 \frac{1{,}02(1{,}02^{10} - 1)}{1{,}02 - 1}$$

$$= 100.000 \cdot 11{,}16871542 \qquad \text{(lihat daftar bunga tabel III)}$$

$$= 1.116.871{,}54$$

Jadi, jumlah uang Ani pada akhir bulan ke-10 adalah Rp1.116.871,54.

□

Tugas Mandiri

Dengan menggunakan paket pengolah angka *Microsoft Excel*, buatlah tabel kondisi keuangan Ani, pada Contoh 3.5.4, setiap awal bulan dan akhir bulannya.

Latihan 3.5

1. Tentukan mana yang merupakan deret geometri dari deret berikut.
   a. $1 + 3 + 9 + 12 + \ldots$
   b. $4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$
   c. $10 + 100 + 1.000 + 10.000 + \ldots$
   d. $1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$
   e. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$
   f. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$
2. Tentukan rasio dan suku ke-10 dari deret geometri berikut ini.
   a. $64 + 16 + 4 + 1 + \ldots$
   b. $1 - 3 + 9 - 27 + \ldots$
   c. $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \ldots$
   d. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$
   e. $1{,}01 + 1{,}01^2 + 1{,}01^3 + \ldots$
   f. $2 + 2\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{2} + \ldots$
3. Suku pertama dan suku ketiga dari suatu deret geometri adalah 81 dan 9. Tentukan suku ke-8 dan jumlah 8 suku pertama dari deret tersebut.
4. Suku ke-4 dan suku ke-9 dari suatu deret geometri adalah –8 dan 256. Tentukan suku pertama, rasio, suku ke-12, dan jumlah 12 suku pertama dari deret tersebut.
5. Dari suatu deret geometri diketahui bahwa jumlah dua suku pertama adalah 12 dan jumlah empat suku pertama adalah 93. Tentukan suku ke-8 dan jumlah 8 suku pertama.
6. Diketahui bahwa jumlah n suku pertama dari suatu deret adalah $S_n = 2^n - 1$.
   a. Buktikan bahwa deret tersebut merupakan deret geometri.
   b. Berapakah suku pertama, rasio, dan suku ke-8 deret tersebut.
7. Tiap-tiap awal bulan, Hasan menabung uang di bank sebesar Rp200.000,00. Bank tersebut memberikan bunga sebesar 3% setiap bulan. Pada akhir bulan ke-8, semua uang Hasan diambil. Berapakah jumlah uang Hasan tersebut?
8. Sebuah perusahaan pada tahun pertama memproduksi sebanyak 1.000 unit barang. Setiap tahun perusahaan tersebut mengalami penurunan produksi sebesar 10%. Berapakah total produksi perusahaan tersebut pada 10 tahun pertama?

3.6 Deret Geometri Konvergen

Pertama-tama kita perhatikan barisan-barisan geometri berikut ini.

1. $1, 2, 4, 8, \ldots$
2. $3, -9, 27, -81, \ldots$
3. $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$
4. $100, -10, 1, -\frac{1}{10}, \ldots$

- Barisan (1) mempunyai rasio 2, sehingga suku-suku dari barisan tersebut semakin membesar.
- Barisan (2) mempunyai rasio (–3) (nilai mutlak dari rasio adalah 3), sehingga nilai mutlak dari suku-suku barisan tersebut juga semakin membesar.
- Barisan (3) mempunyai rasio $\frac{1}{2}$, sehingga suku-suku dari barisan tersebut semakin kecil.
- Barisan (4) mempunyai rasio $-\frac{1}{10}$, nilai mutlak dari rasio adalah $\frac{1}{10}$, sehingga nilai mutlak dari suku-suku barisan tersebut semakin kecil.

Barisan (1) dan barisan (2) yang nilai mutlak suku-sukunya semakin membesar disebut barisan divergen, sedangkan barisan (3) dan (4) yang nilai mutlak suku-sukunya semakin kecil disebut barisan konvergen. Dari contoh-contoh seperti di atas, dapat disimpulkan bahwa agar barisan geometri merupakan barisan konvergen, maka nilai mutlak dari rasionya harus lebih kecil 1.

Dari barisan konvergen dapat dibentuk deret konvergen. Pada deret konvergen, jumlah semua suku tidak akan melebihi suatu harga tertentu, walaupun banyaknya suku tak hingga. Sekarang kita perhatikan deret geometri berikut.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

Deret ini mempunyai suku pertama, $a = 1$ dan rasio, $r = \frac{1}{2}$. Jumlah n suku pertama dari deret ini adalah:

$$S_n = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Diketahui bahwa $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \ldots \left(\frac{1}{2}\right)^n$ nilainya semakin kecil jika n diambil semakin besar. Selisih antara $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ dengan 0 dapat diambil sekecil-kecilnya.

Deret geometri yang demikian disebut deret konvergen. Dari keterangan di atas, dapat disimpulkan bahwa suatu deret geometri tak hingga dikatakan konvergen, jika $|r| < 1$ dan $r \neq 0$. Jumlah deret geometri tak hingga yang konvergen ini adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Contoh 3.6.1

Hitunglah jumlah dari deret geometri yang konvergen berikut.

a. $16 + 8 + 4 + 2 + ...$ b. $3 - 2 + \frac{4}{3} - \frac{8}{9} + \cdots$

Penyelesaian:

a. Dari barisan yang diberikan diketahui $a = 16$ dan $r = \frac{1}{2} < 1$.

Jadi, jumlah dari deret geometri tak hingga tersebut adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = 32$$

b. Dari barisan yang diberikan diketahui bahwa $a = 3$ dan $r = -\frac{2}{3}$.

Jadi, jumlah dari deret geometri tak hingga tersebut adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{9}{5}$$

□

Contoh 3.6.2

Suku pertama dari suatu deret geometri tak hingga adalah 3 dan jumlahnya sampai tak berhingga suku adalah 6. Carilah rasio, dan kemudian tunjukkan deret geometri tak hingga tersebut.

Penyelesaian:

Diketahui $S_\infty = \frac{a}{1-r} = 6$ dengan $a = 3$, sehingga diperoleh hubungan:

$$\frac{3}{1-r} = 6 \Leftrightarrow 6 - 6r = 3$$
$$\Leftrightarrow 6r = 3$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

Jadi, rasio dari deret geometri tak hingga tersebut adalah $\frac{1}{2}$, sedangkan deret yang ditanyakan adalah:

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + ...$$

□

Contoh 3.6.3

Rumus suku ke-n dari deret geometri adalah $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$. Tentukan n terkecil sedemikian hingga $|S_\infty - S_n| < 0{,}001$.

Penyelesaian:

Dari soal tersebut diketahui $a = u_1 = 1$ dan $u_2 = \frac{1}{3}$. Akibatnya, rasionya adalah $r = \frac{1}{3}$.

Selanjutnya, juga diperoleh:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

dan

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

Akhirnya,

$$|S_\infty - S_n| = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$$

dan

$$\begin{aligned} |S_\infty - S_n| < 0{,}001 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}} < \frac{1}{1.000} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3^{n-1}} < \frac{1}{500} \\ &\Leftrightarrow \quad 3^{n-1} > 500 \\ &\Leftrightarrow \quad n-1 > 5 (\text{karena } 3^5 = 243 \text{ dan } 3^6 = 729) \\ &\Leftrightarrow \quad n > 6 \end{aligned}$$

Jadi, n terkecil agar $|S_\infty - S_n| < 0{,}001$ adalah 6.

□

Latihan 3.6

1. Tunjukkan mana dari deret geometri tak hingga berikut yang konvergen dan mana yang divergen.

   a. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

   b. $1.000 + 100 + 10 + 1 + \ldots$

   c. $3 + 9 + 27 + 81 + \ldots$

   d. $16 - 8 + 4 - 2 + \ldots$

   e. $10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \ldots$

   f. $2 + 2\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{2} + \ldots$

2. Hitunglah S_∞ dari deret geometri tak hingga berikut (bila ada) dan berikan penjelasan jika tidak ada.

   a. $6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \ldots$

   b. $1{,}01 + (1{,}01)^2 + (1{,}01)^3 + (1{,}01)^4 + \ldots$

   c. $10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + \ldots$

   d. $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \ldots$

   e. $1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

   f. $30 + 15 + 7\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} + \ldots$

3. Rumus suku ke-n dari suatu deret geometri adalah $u_n = \frac{1}{5^{n+1}}$. Tentukan suku pertama, rasio, dan jumlah tak hingga suku dari deret geometri tersebut.
4. Suatu deret geometri tak hingga diketahui mempunyai rasio, $r = \frac{3}{4}$ dan jumlah tak berhingga sukunya adalah 6. Tentukan suku pertama dan deret geometri tersebut.
5. Suatu deret geometri tak hingga mempunyai suku pertama 81 dan suku ke-5 adalah 1. Tentukan rasio dan jumlah tak hingga dari deret geometri tersebut.
6. Rumus suku ke-n dari deret geometri adalah $u_n = \frac{3}{4^{n-1}}$. Tentukan n terkecil sedemikian hingga $|S_\infty - S_n| < 0{,}001$.
7. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 32 m. Setelah memantul di tanah, bola tersebut mencapai ketinggian $\frac{3}{4}$ kali ketinggian sebelumnya, begitu seterusnya. Berapa meterkah jarak yang ditempuh bola tersebut sampai berhenti?
8. Di dalam sebuah persegi dengan sisi 8 cm dibuat persegi kedua dengan menghubungkan titik-titik tengah sisi persegi pertama. Kemudian, dibuat persegi ketiga dengan menghubungkan titik-titik tengah sisi persegi kedua, begitu seterusnya. Berapakah jumlah semua luas persegi yang dibuat?

3.7 Notasi Sigma

Di dalam operasi penjumlahan sering dijumpai penjumlahan dari beberapa bilangan, sebagai contoh jika kita ingin mengetahui jumlah dari 10 bilangan asli yang pertama, maka kita tuliskan dengan:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

Jika bilangan yang dijumlahkan tidak terlalu banyak, cara penulisan di atas tidak akan menimbulkan masalah, tetapi jika yang dijumlahkan terlalu banyak, misal 200 bilangan, maka penulisan di atas tidak efisien dan tidak praktis. Untuk kasus ini biasanya penulisannya disingkat dengan menyisipkan tanda titik tiga "...". Sebagai contoh, jika kita akan menuliskan jumlahan 200 bilangan asli yang pertama, maka kita tuliskan dengan:

$$1 + 2 + 3 + ... + 200$$

Dengan cara yang sama penulisan 10 bilangan asli ganjil pertama ditulis dengan:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

dapat disingkat dengan:

$$1 + 3 + 5 + ... + 19$$

Apabila yang dijumlahkan n buah bilangan asli genap pertama, maka penulisan singkatnya adalah:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2(n - 1) + 2n$$

Cara lain untuk menuliskan suatu penjumlahan secara singkat, selain dengan menyisipkan tanda titik tiga "..." adalah dengan menggunakan tanda sigma atau notasi sigma. Tanda sigma dituliskan dengan lambang "∑". Lambang ini merupakan huruf besar Yunani dari perkataan asing "Sum" yang artinya jumlah. Tanda sigma banyak dijumpai pada pelajaran-pelajaran lain, seperti pada ekonomi dan fisika.

Ketentuan umum penggunaan notasi sigma didasarkan pada definisi berikut.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

yang dibaca dengan "jumlah a_i untuk $i = 1$ sampai $i = n$".
dengan: i adalah indeks penjumlahan
1 adalah indeks pertama
n adalah indeks terakhir, dengan n adalah bilangan bulat positif

Catatan:

1. Indeks pertama dalam notasi sigma tidak harus 1 dan indeks terakhir boleh tak hingga (lihat pada deret geometri tak hingga).
2. Sebelum menuliskan penjumlahan ke dalam notasi sigma perlu ditentukan lebih dahulu rumus umum suku ke-n dan indeks pertama serta indeks terakhir.

Jika nilai a_i di dalam notasi sama, untuk setiap i = 1, 2, ... , n, katakan a, maka:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a + a + a + \ldots + a = na$$

Dalam hal ini, kita juga sering menggunakan notasi sigma dengan tidak menggunakan indeks, sebagai contoh:

$$\sum_{i}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Contoh 3.7.1

Nyatakan ke dalam notasi sigma dari beberapa penjumlahan berikut.

a. $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{100}$

b. $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$

c. $a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots + a^{25}$

d. $1{,}01 + 1{,}01^2 + 1{,}01^3 + \ldots + 1{,}01^{20}$

Penyelesaian:

a. Suku ke-n dari penjumlahan tersebut adalah u_n, indeks pertama 1, dan indeks terakhir adalah 100. Jadi,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{100} = \sum_{i=1}^{100} u_i$$

b. Suku ke-n dari penjumlahan tersebut adalah 2, indeks pertama 1, dan indeks terakhir adalah 8. Jadi,

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = \sum_{i=1}^{8} 2$$

c. Suku ke-n dari penjumlahan tersebut adalah a^n, indeks pertama 1, dan indeks terakhir adalah 25. Jadi,

$$a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots + a^{25} = \sum_{i=1}^{25} a^i$$

d. Suku ke-n dari penjumlahan tersebut adalah $1{,}01^n$, indeks pertama 1, dan indeks terakhir adalah 20. Jadi,

$$1{,}01 + 1{,}01^2 + 1{,}01^3 + \ldots + 1{,}01^{20} = \sum_{i=1}^{20} (1{,}01)^i$$

□

Contoh 3.7.2

Tuliskan notasi sigma berikut ke dalam bentuk penjumlahan biasa.

a. $\sum\limits_{i=1}^{5} (5i+3)$ b. $\sum\limits_{i=2}^{7} \frac{1}{3^i}$ c. $\sum\limits_{i=1}^{10} \frac{1}{1{,}02^i}$

Penyelesaian:

a. $\sum\limits_{i=1}^{5} (5i+3) = [5(1) + 3] + [5(2) + 3] + [5(3) + 3] + [5(4) + 3] + [5(5) + 3]$

$= 8 + 13 + 18 + 23 + 28$

b. $\sum\limits_{i=2}^{7} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^7}$

c. $\sum\limits_{i=1}^{10} \frac{1}{1{,}02^i} = \frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}02^2} + \frac{1}{1{,}02^3} + \cdots + \frac{1}{1{,}02^{10}}$

□

Untuk menentukan nilai suatu penjumlahan perlu diingat kembali rumus jumlah suatu deret. Jika deretnya merupakan deret aritmetika, maka rumus jumlah n suku pertama adalah:

$$S_n = \frac{n}{2}(a + u_n)$$

dengan a menyatakan suku pertama dari deret aritmetika tersebut dan u_n suku ke-n dari deret itu. Selanjutnya, jika deretnya merupakan deret geometri, maka rumus jumlah n suku pertamanya adalah:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r},\ r \neq 1 \text{ atau } S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1},\ r \neq 1$$

dengan a menyatakan suku pertama dan r merupakan rasio dari deret geometri tersebut. Akhirnya, jika deretnya merupakan deret geometri tak hingga yang konvergen, maka jumlah tak hingga sukunya adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Contoh 3.7.3

Tuliskan notasi sigma berikut ke dalam penjumlahan biasa, dan kemudian hitunglah hasilnya.

a. $\sum\limits_{i=1}^{5} (i^2+1)$

b. $\sum\limits_{k=1}^{25} (2k+1)$

c. $\sum\limits_{n=2}^{5} 3^{n-1}$

d. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$

Penyelesaian:

a. $\sum_{i=1}^{5}(i^2+1) = 2 + 5 + 10 + 17 + 26 = 60$

b. $\sum_{k=1}^{25}(2k+1) = 3 + 5 + 7 + ... + 51$

Jumlahan ini merupakan deret aritmetika dengan suku pertama = 3, beda = 2, banyak suku = 25, dan suku terakhir = 51, sehingga hasil jumlahan tersebut adalah:

$$S_{25} = \frac{25}{2}(3+51) = 25 \cdot 27 = 675$$

c. $\sum_{n=2}^{5} 3^{n-1} = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$

Jumlahan ini merupakan deret geometri dengan $a = 3$, $r = 3$, dan $n = 4$, sehingga hasil jumlahan tersebut adalah:

$$S_9 = \frac{3(3^4-1)}{3-1} = \frac{3 \cdot 80}{2} = 120$$

d. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$

Jumlahan ini merupakan deret geometri tak hingga dengan $a = \frac{1}{2}$ dan $r = \frac{1}{2}$, sehingga jumlah tak hingga dari deret geometri ini adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

□

Contoh 3.7.4

Hitunglah:

a. $\sum_{i=1}^{10} i$ b. $\sum_{i=1}^{10} i^2$ c. $\sum_{i=2}^{10} i^3$

Penyelesaian:

a. $\sum_{i=1}^{10} i = \frac{10(10+1)}{2} = 55$

b. $\sum_{i=1}^{10} i^2 = \frac{10(10+1)(20+1)}{6} = 385$

c. $\sum_{i=2}^{10} i^3 = \sum_{i=1}^{10} i^3 - 1^3 = \left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2 - 1 = 3.025 - 1 = 3.024$

□

Dengan kenyataan bahwa operasi penjumlahan bersifat linear, maka dapat ditunjukkan notasi sigma juga bersifat linear, berarti notasi sigma mempunyai sifat-sifat:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} ka_i = k\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

Latihan 3.7

1. Nyatakan jumlahan berikut ke dalam notasi sigma.
   a. $1 + 2 + 3 + ... + 99$
   b. $1 + 3 + 5 + ... + 99$
   c. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{50}$
   d. $2 - 4 + 6 - 8 + ... - 100$
   e. $c_3 + c_5 + c_7 + ... + c_{79}$
   f. $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_{20})$

2. Nyatakan notasi sigma berikut ke dalam penjumlahan biasa, dan kemudian tentukan hasil penjumlahannya.
   a. $\sum\limits_{k=1}^{5} (2k-1)$
   b. $\sum\limits_{n=1}^{6} (n^2+1)$
   c. $\sum\limits_{k=2}^{k=5} \frac{3}{1+k}$
   d. $\sum\limits_{i=1}^{6} (-1)^n 3^{i-1}$
   e. $\sum\limits_{j=1}^{5} (1+0{,}02)^j$
   f. $\sum\limits_{k=2}^{6} \frac{5}{3^{k-1}}$

3. Selidiki deret-deret berikut apakah merupakan deret aritmetika, deret geometri, atau deret tak hingga, kemudian tentukan jumlah dari deret tersebut.
   a. $\sum\limits_{k=1}^{20} (3k-1)$
   b. $\sum\limits_{n=2}^{8} 5^{n-1}$
   c. $\sum\limits_{k=3}^{12} (2k-3)$
   d. $\sum\limits_{k=1}^{10} \frac{1}{3^i}$
   e. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5^{n+1}}$
   f. $\sum\limits_{j=1}^{10} (1{,}03)^j$

4. Dengan menggunakan prinsip induksi matematika, buktikan bahwa:
   a. $\sum\limits_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
   b. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
   c. $\sum\limits_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(1-r^n)}{1-r},\ r \neq 1$

5. Hitunglah:

a. $\sum_{i=1}^{10} i(i-3)$

b. $\sum_{i=1}^{100} (2i-3)$

c. $\sum_{k=1}^{10} (k+1)(2k+3)$

d. $\sum_{i=2}^{10} (i^3-2i^2)$

3.8 Pembuktian dengan Induksi Matematika

Pada subbab ini kita akan membahas kebenaran rumus untuk jumlah dari n bilangan asli pertama, jumlah dari n kuadrat bilangan asli pertama, dan jumlah n pangkat tiga bilangan asli pertama, yaitu:

1. $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Untuk rumus-rumus yang kebenarannya berlaku untuk setiap bilangan asli, kita dapat membuktikan bahwa rumus-rumus ini benar dengan menggunakan Prinsip Induksi Matematika, yang mengatakan bahwa jika $\{P_n\}$ merupakan barisan pernyataan yang memenuhi kondisi:

(i) P_1 adalah pernyataan benar

(ii) kebenaran P_i mengakibatkan kebenaran P_{i+1}

maka P_n adalah pernyataan benar untuk semua bilangan asli n.

Sekarang kita akan menggunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan rumus (2). Untuk setiap bilangan asli n, misalkan P_n adalah pernyataan:

$$P_n: 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Kita perhatikan bahwa:

$$P_1: 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

merupakan pernyataan yang benar.

Sekarang diasumsikan bahwa P_i merupakan pernyataan benar, sehingga berlaku:

$$P_i: 1^2+2^2+3^2+\ldots+i^2 = \frac{i(i+1)(2i+1)}{6}$$

Dengan kebenaran P_i, kemudian ditunjukkan bahwa P_{i+1} juga benar. Perhatikan bahwa:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + i^2 + (i+1)^2 = \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} + (i+1)^2$$

$$= (i+1)\,\frac{2i^2 + i + 6i + 6}{6}$$

$$= (i+1)\,\frac{2i^2 + 7i + 6}{6}$$

$$= \frac{(i+1)(i+2)(2i+3)}{6}$$

Jadi, P_{i+1} juga benar. Akibatnya, dengan menggunakan prinsip induksi matematika, maka dapat disimpulkan bahwa P_n adalah pernyataan benar untuk semua bilangan asli n.

Latihan 3.8

1. Dengan menggunakan prinsip induksi matematika, buktikan bahwa:
   a. $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$
   b. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$
   c. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   d. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$
   e. $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$
   f. $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r},\ r \neq 1$
2. Dengan menggunakan prinsip induksi matematika, buktikan bahwa:
   a. $3^{2n} - 1$ habis dibagi 8 untuk setiap bilangan asli n
   b. $5^{2n} - 1$ habis dibagi 3 untuk setiap bilangan asli n
   c. $n(n+1)(n+2)$ habis dibagi 6 untuk setiap bilangan asli n
   d. $n^2(n+1)^2$ habis dibagi 4 untuk setiap bilangan asli n
   e. $3^{4n} - 1$ habis dibagi 80 untuk setiap bilangan asli n
3. Dengan menggunakan prinsip induksi matematika, buktikan bahwa:
   a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$
   b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (5k-1) = \frac{n(5n+3)}{2}$
   c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$
4. Dengan menggunakan prinsip induksi matematika, buktikan bahwa:
   a. $\dfrac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}$
   b. $\dfrac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a+b} = a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \ldots + ab^{2n-1} + b^{2n}$
   c. $\dfrac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha} = \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos(2n-1)\alpha.$

5. Dengan menggunakan prinsip induksi matematika, buktikan bahwa:
   a. $2^n \geq n$ untuk setiap bilangan asli n
   b. $2^n \geq 2n$ untuk setiap bilangan asli n
   c. $3^n \geq 2n + 1$ untuk setiap bilangan asli n.

3.9 Aplikasi Deret Aritmetika dan Geometri

Di dalam subbab ini akan dibahas beberapa permasalahan di dalam kehidupan sehari-hari yang model matematikanya berupa deret aritmetika atau deret geometri.

Permasalahan I

Seorang buruh di sebuah perusahaan menerima gaji permulaan Rp800.000,00 per bulan. Setiap bulan dia mendapatkan kenaikan gaji sebesar Rp10.000,00. Tuliskan sebuah deret untuk menunjukkan jumlah pendapatan dalam sepuluh bulan pertama dan jumlahkan deret-deret itu?

Pembahasan:

Pendapatan buruh tersebut merupakan barisan aritmetika dengan:

gaji permulaan = a = 800.000

besar kenaikan gaji = b = 10.000

sehingga deret aritmetika yang diperoleh adalah:

$$800.000 + 810.000 + 820.000 + \ldots + 890.000$$

dan

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \cdot 800.000 + (10 - 1)\ 10.000) = 5(1.600.000 + 90.000) = 8.450.000$$

Jadi, jumlah pendapatan buruh tersebut dalam sepuluh bulan pertama adalah Rp8.450.000,00.

Permasalahan II

Pada awal tahun 2005, Tuan Adi Prabowo menabung uang di bank sebesar Rp10.000.000,00. Setiap tahun Tuan Adi Prabowo mendapatkan bunga 10% dari sisa tabungan terakhir dan bunga tersebut selalu menambah tabungan terakhir. Berapa besarnya tabungan Tuan Adi Prabowo pada tahun 2015?

Pembahasan:

Kita tidak dapat menggunakan pengertian deret aritmetika ataupun deret geometri untuk menyelesaikan kasus di atas. Untuk kasus yang terakhir ini akan dijelaskan dalam uraian berikut.

3.9.1 Bunga Tunggal dan Bunga Majemuk

Di dalam kehidupan sehari-hari, kita sering menjumpai transaksi pinjam-meminjam uang, baik itu lewat bank ataupun lewat perorangan langsung. Terdapat beberapa model aturan yang diberlakukan di dalam proses pinjam-meminjam tersebut. Sebagai contoh, Pak Hasan meminjam uang kepada Pak Ali sebesar Rp1.000.000,00. Kedua pihak telah membuat kesepakatan bahwa setiap bulan Pak Hasan akan memberikan bunga sebesar Rp100.000,00. Berapa yang harus dikembalikan Pak Hasan, jika dia dapat melunasi utangnya dalam 10 bulan pertama? Tentu Pak Hasan harus mengembalikan pinjaman beserta bunganya sebesar Rp1.000.000,00 + Rp100.000,00 + Rp100.000,00 + Rp100.000,00 + ... + Rp100.000,00 (dengan Rp100.000,00 sebanyak 10 suku).

Apabila dituliskan dengan notasi sigma adalah:

$$1.000.000 + \sum_{i=1}^{10} 100.000 = 1.000.000 + 10 \cdot 100.000$$

$$= 1.000.000 + 1.000.000$$

$$= 2.000.000$$

Perhitungan bunga semacam ini disebut perhitungan bunga tunggal atau bunga tetap. Jadi, yang dimaksud dengan bunga tunggal adalah bunga yang diberikan setiap jangka waktu pinjaman tertentu yang besarnya tetap. Sekarang bandingkan dengan permasalahan berikut. Ibu Yuli menabung uang di sebuah bank sebesar Rp1.000.000,00. Setiap bulan ibu Yuli mendapatkan bunga sebesar 2% dari sisa tabungan terakhir dan bunga selalu ditambahkan ke sisa tabungan terakhir. Berapa besar tabungan ibu Yuli setelah sepuluh bulan pertama?

1. Setelah 1 bulan, tabungan tersebut akan menjadi:
   $1.000.000 + 2\% \cdot 1.000.000 = 1.000.000\ (1 + 2\%)$
2. Setelah 2 bulan, tabungan tersebut akan menjadi:
   $1.000.000\ (1 + 2\%) + 2\% \cdot 1.000.000\ (1 + 2\%) = 1.000.000\ (1 + 2\%)^2$
3. Setelah 3 bulan, tabungan tersebut akan menjadi:
   $1.000.000\ (1 + 2\%)^2 + 2\% \cdot 1.000.000\ (1 + 2\%)^2 = 1.000.000\ (1 + 2\%)^3$

⋮ ⋮

10. Setelah 10 bulan, tabungan tersebut akan menjadi:
    $1.000.000\ (1 + 2\%)^9 + 2\% \cdot 1.000.000\ (1 + 2\%)^9 = 1.000.000\ (1 + 2\%)^{10}$

Perhitungan bunga semacam ini disebut perhitungan bunga majemuk. Jadi, sebuah modal dikatakan diberi bunga majemuk jika setiap bunga yang didapat pada setiap jangka waktu peminjaman terus digabungkan pada modalnya untuk juga mendapatkan bunga.

a. Mencari Besar Modal Terakhir

Berikut ini diberikan rumus umum untuk suatu modal yang diberikan bunga majemuk sesudah n periode pinjaman. Jika sebuah modal M rupiah dibungakan secara bunga majemuk dengan bunga p% setiap tahun, maka:

1) Sesudah 1 tahun, modal tersebut akan menjadi:

$$M + \frac{p}{100} M = M\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

2) Sesudah 2 tahun, modal tersebut akan menjadi:

$$M\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \frac{p}{100} M\left(1 + \frac{p}{100}\right) = M\left(1 \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$= M\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

3) Sesudah 3 tahun, modal tersebut akan menjadi:

$$M\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 + \frac{p}{100} M\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = M\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$= M\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

Akhirnya setelah n tahun, modal tersebut akan menjadi:

$$M_n = M\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Jika dimisalkan $i = \frac{p}{100}$, maka besarnya modal setelah n tahun adalah:

$$M_n = M(1 + i)^n$$

Untuk perhitungan $(1 + i)^n$ dapat digunakan daftar logaritma atau daftar I yang terdapat dalam daftar bunga. Jika digunakan daftar logaritma, maka ketelitiannya hanya terbatas empat angka di belakang koma, sedangkan jika digunakan daftar bunga, ketelitiannya sampai delapan angka di belakang koma. Berikut ini diberikan contoh cara menghitung besar modal setelah n periode pinjaman.

Contoh 3.9.1

Sebuah modal sebesar Rp4.000.000,00 dibungakan dengan bunga majemuk 5% untuk setiap tengah tahun. Berapakah besarnya modal itu sesudah 10 tahun?

Pembahasan:

Dari soal tersebut diketahui bahwa:

M = Rp4.000.000,00
i = 5% tiap tengah tahun
n = 20 (karena 10 tahun = 20 periode bunga)

Cara I digunakan daftar logaritma

Modal sesudah 10 tahun (= 20 periode bunga) adalah:

$$M_{20} = 4.000.000\,(1 + 0{,}05)^{20}$$
$$\Leftrightarrow \log M_{20} = \log 4.000.000 + 20 \log (1{,}05)$$
$$\Leftrightarrow \log M_{20} = 6 + \log 4 + 20\,(0{,}0212) \quad \text{(lihat daftar logaritma)}$$
$$\Leftrightarrow \log M_{20} = 6 + 0{,}6021 + 0{,}4240$$
$$\Leftrightarrow \log M_{20} = 7{,}0261$$
$$\Leftrightarrow M_{20} = 10.619.400{,}5 \quad \text{(lihat daftar antilogaritma)}$$

Jadi, besarnya modal setelah 10 tahun adalah Rp10.620.000,00.

Cara II digunakan daftar bunga

Modal sesudah 10 tahun (= 20 periode bunga) adalah:

$$\begin{aligned} M_{20} &= 4.000.000\,(1 + 0{,}05)^{20} \\ &= 4.000.000\,(1{,}05)^{20} \\ &= 4.000.000\,(2{,}65329771) \quad \text{(lihat daftar bunga)} \\ &= 10.613.190{,}84 \end{aligned}$$

Jadi, besarnya modal tersebut setelah 10 tahun adalah Rp10.613.190,84.

□

Contoh 3.9.2

Suatu modal sebesar Rp1.000.000,00 dibungakan selama 3 tahun 3 bulan dengan bunga majemuk 5% untuk setiap setengah tahun. Berapakah nilai akhir modal tersebut?

Penyelesaian:

Dari soal tersebut diketahui bahwa:

M = Rp1.000.000,00

i = 5% tiap tengah tahun

n = $6\frac{1}{2}$ (karena 3 tahun 3 bulan = $6\frac{1}{2}$ periode bunga)

Di sini n diambil 6 terlebih dahulu, kemudian dihitung dengan daftar bunga, sedangkan yang $\frac{1}{2}$ dihitung dengan bunga tunggal.

Modal tersebut setelah 3 tahun (6 periode bunga) adalah:

$$\begin{aligned} M_6 &= 1.000.000\ (1 + 0{,}05)^6 \\ &= 1.000.000\ (1{,}05)^6 \\ &= 1.000.000\ (1{,}34009564) \quad \text{(lihat daftar bunga)} \\ &= 1.340.095{,}64 \end{aligned}$$

Modal tersebut setelah 3 tahun 3 bulan ($6\frac{1}{2}$ periode bunga) adalah:

$$\begin{aligned} M_{6\frac{1}{2}} &= M_6 + \frac{1}{2} \cdot 5\% \cdot M_6 \\ &= 1.340.095{,}64 + (0{,}5)(0{,}05)(1.340.095{,}64) \\ &= 1.340.095{,}64 + 33.502{,}391 \\ &= 1.373.598{,}031 \end{aligned}$$

Jadi, modal tersebut setelah 3 tahun 3 bulan adalah Rp1.373.598,031.

□

Catatan:

Jika suatu modal M dibungakan dengan dasar bunga majemuk $p\%$ per periode bunga, sedangkan jangka waktunya adalah $(n + r)$ periode bunga, dengan $0 < r < 1$, maka:

$$\begin{aligned} M_{n+r} &= M_{n+r} \cdot p\% \cdot M_n \\ &= M_n (1 + r \cdot p\%) \\ &= M(1 + p\%)^n (1 + r \cdot p\%) \end{aligned}$$

Selanjutnya, jika $p\% = i$, maka modal terakhir setelah dibungakan $(n + r)$ periode bunga adalah:

$$M_{n+r} = M(1 + i)^n (1 + r \cdot i)$$

b. Mencari Besar Suku Bunga

Dari hubungan $M_n = M(1 + i)^n$, jika tiga unsur dari M_n, M, i, dan n diketahui, maka satu unsur yang lain dapat dicari. Jadi, jika suatu modal awal diketahui dan setelah jangka waktu tertentu diketahui nilai akhir modalnya, maka besar persentase bunga dapat dicari.

Berikut ini diberikan contoh cara menentukan besarnya persentase bunga.

Contoh 3.9.3

Suatu modal yang besarnya Rp2.000.000,00 dibungakan dengan dasar bunga majemuk. Sesudah 5 bulan modal itu menjadi Rp2.500.000,00. Berapakah besar suku bunga per bulan?

Penyelesaian:

Dari soal tersebut diketahui bahwa:

M = Rp2.000.000,00
n = 5
M_5 = Rp2.500.000,00

Dari rumus $M_n = M(1 + i)^n$, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
2.500.000 = 2.000.000\,(1+i)^5 &\Leftrightarrow (1+i)^5 = \frac{2.500.000}{2.000.000}\\
&\Leftrightarrow (1+i)^5 = \frac{5}{4}\\
&\Leftrightarrow 5 \log (1+i) = \log 5 - \log 4\\
&\Leftrightarrow 5 \log (1+i) = 0{,}6990 - 0{,}6021\\
&\Leftrightarrow 5 \log (1+i) = 0{,}0969\\
&\Leftrightarrow \log (1+i) = 0{,}0194\\
&\Leftrightarrow (1+i) = 1{,}046\\
&\Leftrightarrow i = 0{,}046
\end{aligned}
$$

Jadi, besar persentase bunganya adalah 4,6% per bulan.

□

c. Mencari Lama Suatu Modal Dibungakan

Jika unsur M, i, dan M_n dari $M_n = M(1 + i)^n$ diketahui, maka kita dapat menentukan n. Jika nilai n tidak bulat, maka kita dapat menggunakan rumus interpolasi, tetapi dapat juga dihitung dengan cara bunga tunggal untuk sisa dari n yang terdekat yang telah diketahui dari daftar bunga.

Contoh 3.9.4

Dalam berapa tahunkah modal Rp2.000.000,00 menjadi Rp3.650.000,00 dengan besar bunga 2% tiap 6 bulan?

Penyelesaian:

Dari soal tersebut diketahui bahwa:

M = Rp2.000.000,00
M_n = Rp3.650.000,00
i = 2%

Dari rumus $M_n = M(1 + i)^n$, diperoleh:

$$3.650.000 = 2.000.000\,(1+2\%)^n \Leftrightarrow (1+2\%)^n = \frac{3.650.000}{2.000.000} = 1{,}8250$$

Jika dilihat dalam daftar bunga akan didapat $30 < n < 31$. Jika $n = 30$, maka:

$$\begin{aligned} M_{30} &= 2.000.000\ (1 + 2\%)^{30} \\ &= 2.000.000\ (1.81136158) \\ &= 3.622.723{,}16 \end{aligned}$$

Padahal diketahui M_n = Rp3.650.000,00. Jadi, kelebihan bunga Rp27.276,84 ini dihitung dengan cara bunga tunggal. Misalkan kelebihannya x hari, maka

$$\text{bunga dalam } x \text{ hari} = 3.622.723{,}16 \cdot \frac{2}{100}\,\frac{x}{180} = 27.276{,}84$$

sehingga diperoleh $x = 65$ (dibulatkan)

Jadi, modal di atas dibungakan selama 30 tengah tahun dan 65 hari atau 15 tahun 65 hari.

□

d. Mencari Nilai Tunai

Dari rumus $M_n = M(1 + i)^n$, jika diketahui M_n, i, dan n, maka kita dapat menentukan besarnya modal awal atau nilai tunai M, yaitu:

$$M = \frac{M_n}{(1+i)^n}$$

Di sini M adalah harga modal pada permulaan perhitungan, sehingga sering disebut dengan nilai tunai atau harga kontan. Untuk selanjutnya, nilai tunai M sering dituliskan dengan N_t dan besarnya M_n sudah diketahui, sehingga indeks n tidak perlu lagi. Akibatnya, kita dapat menuliskan M_n dengan M saja. Jadi, rumus untuk nilai tunai sering dituliskan dengan:

$$N_t = \frac{M}{(1+i)^n} \quad \text{atau} \quad N_t = M\frac{1}{(1+i)^n}$$

Dengan $\frac{1}{(1+i)^n}$ untuk beberapa nilai i dan beberapa nilai n yang bulat dapat dilihat pada daftar bunga.

Berikut ini diberikan suatu contoh untuk menghitung nilai tunai suatu pinjaman jika besar pinjaman, suku bunga, dan lamanya pinjaman diketahui.

Contoh 3.9.5

Carilah nilai tunai suatu pinjaman sebesar Rp1.000.000,00 yang harus dibayar setelah 5 tahun kemudian, jika besarnya suku bunga adalah 5% setiap tahun?

Penyelesaian:

Dari soal tersebut diketahui bahwa:

$$\begin{aligned} M &= \text{Rp}1.000.000{,}00 \\ i &= 5\% \\ n &= 5 \end{aligned}$$

sehingga nilai tunai pinjaman tersebut adalah:

$$N_t = M\frac{1}{(1+i)^n}$$

$$= 1.000.000 \frac{1}{1{,}05^5}$$
$$= 1.000.000 \cdot 0{,}78352617$$
$$= 783.526{,}17$$

Jadi, nilai tunai dari pinjaman sebesar Rp1.000.000,00 yang harus dibayar 5 tahun kemudian adalah Rp783.526,17.

□

3.9.2 Anuitas

Yang dimaksud dengan anuitas adalah jumlah pembayaran secara periodik yang tetap besarnya dan di dalamnya sudah terhitung pelunasan utang dan bunganya. Hal ini berarti anuitas terdiri atas dua bagian, yaitu bagian yang digunakan untuk melunasi pinjaman yang disebut angsuran dan bagian untuk membayar bunga. Dalam setiap anuitas, jumlah angsuran dan bunga selalu tetap. Untuk memperjelas pengertian anuitas di atas, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 3.9.6

Pinjaman sebesar Rp1.000.000,00 akan dilunasi dalam lima anuitas tahunan. Anuitas pertama dibayar satu tahun setelah penerimaan pinjaman dengan bunga 4% per tahun. Tentukan besarnya tiap anuitas tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan besarnya anuitas adalah A. Jadi, pada saat:

a. Anuitas ke-1,
sisa pinjaman tinggal:
$$1.000.000\,(1{,}04) - A$$

b. Anuitas ke-2,
sisa pinjaman tinggal:
$$\{1.000.000(1{,}04) - A\}\,(1{,}04) - A = 1.000.000\,(1{,}04)^2 - A(1{,}04) - A$$

c. Anuitas ke-3,
sisa pinjaman tinggal:
$$\{1.000.000\,(1{,}04)^2 - A(1{,}04) - \mathrm{A}\}\,(1{,}04) - A$$
$$= 1.000.000\,(1{,}04)^3 - A(1{,}04)^2 - A(1{,}04) - A$$

d. Anuitas ke-4,
sisa pinjaman tinggal:
$$\{1.000.000\,(1{,}04)^3 - A(1{,}04)^2 - A(1{,}04) - A\}\,(1{,}04) - A$$
$$= 1.000.000\,(1{,}04)^4 - A(1{,}04)^3 - A(1{,}04)^2 - A(1{,}04) - A$$

e. Anuitas ke-5,
sisa pinjaman tinggal:
$$\{1.000.000\,(1{,}04)^4 - A(1{,}04)^3 - A(1{,}04)^2 - A(1{,}04) - A\}\,(1{,}04) - A$$
$$= 1.000.000\,(1{,}04)^5 - A(1{,}04)^4 - A(1{,}04)^3 - A(1{,}04)^2 - A(1{,}04) - A$$

Pada saat anuitas ke-5 pinjaman sudah lunas, sehingga sisa pinjaman sama dengan nol. Jadi, diperoleh hubungan:
$$1.000.000\,(1{,}04)^5 - A(1{,}04)^4 - A(1{,}04)^3 - A(1{,}04)^2 - A(1{,}04) - A = 0$$
$$\Leftrightarrow\ 1.000.000\,(1{,}04)^5 = A(1{,}04)^4 + A(1{,}04)^3 + A(1{,}04)^2 + A(1{,}04) + A$$

$$\Leftrightarrow 1.000.000 = A\left\{\frac{1}{1,04}+\frac{1}{(1,04)^2}+\frac{1}{(1,04)^3}+\frac{1}{(1,04)^4}+\frac{1}{(1,04)^5}\right\}$$

$$\Leftrightarrow 1.000.000 = A\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{(1,04)^n}$$

$$\Leftrightarrow A = 1.000.000\frac{1}{\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{(1,04)^n}}$$

$$\Leftrightarrow A = 1.000.000\ (0,22462711) \qquad \text{(lihat daftar bunga)}$$

$$\Leftrightarrow A = 224.627,11$$

Jadi, besarnya anuitas adalah Rp224.627,11.

□

Dengan memperhatikan Contoh 3.9.6, sekarang akan diturunkan rumus umum untuk mencari besarnya anuitas yang harus dibayar setiap periode bunga. Jika pinjaman sebesar M akan dilunasi dengan n kali anuitas, dan anuitas pertama dibayar setelah satu periode bunga dengan suku bunga yang diberlakukan adalah $p\% = i$, maka besarnya anuitas adalah:

$$A = M\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^k}}$$

Contoh 3.9.7

Sebuah pinjaman sebesar Rp2.000.000,00 dilunasi dalam 8 anuitas, tiap satu tahun. Anuitas pertama dibayar setelah 1 tahun pinjaman. Tentukan besar anuitas itu, jika suku bunga yang berlaku 4% per tahun.

Penyelesaian:

Dari soal tersebut diketahui:

M = Rp2.000.000,00
i = 0,04
n = 8

Besarnya anuitas adalah:

$$A = M\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^k}}$$

$$= 2.000.000\frac{1}{\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{(1,04)^k}}$$

$$= 2.000.000\ (0,14852783) \qquad \text{(lihat daftar bunga)}$$

$$= 297.055,66$$

Jadi, besarnya anuitas adalah Rp297.055,66.

□

Seperti telah dijelaskan di awal subbab ini, dalam setiap anuitas sudah termasuk di dalamnya pelunasan pinjaman dan pembayaran bunga. Karena diberlakukan bunga majemuk, maka bunga dihitung berdasarkan sisa pinjaman. Dengan demikian, pembayaran bunga dalam tiap anuitas tidak akan sama besarnya, demikian juga bagian pelunasan pinjaman. Pembayaran bunga dalam tiap anuitas semakin lama semakin kecil dan bagian pelunasan pinjaman makin lama makin besar. Pertanyaan berikutnya, bagaimana mencari rumus umum untuk pelunasan?

Berikut ini diberikan cara mencari besarnya pelunasan setiap anuitas. Misalkan besarnya pinjaman adalah M dan besarnya anuitas A, serta suku bunga yang berlaku $i = p\%$. Jika pelunasan pada anuitas ke-1 = a_1, pelunasan pada anuitas ke-2 = a_2, pelunasan pada anuitas ke-3 = a_3, dan seterusnya, maka:

1. Pada akhir tahun ke-1 (pada anuitas 1),
$$A = a_1 + iM \text{ dan sisa pinjaman} = M - a_1$$
2. Pada akhir tahun ke-2,
$$A = a_2 + i(M - a1) \text{ dan sisa pinjaman} = M - a_1 - a_2$$
3. Pada akhir tahun ke-3,
$$A = a_3 + i(M - a_1 - a_2) \text{ dan sisa pinjaman} = M - a_1 - a_2 - a_3$$
dan seterusnya.

Dari persamaan-persamaan di atas, diperoleh hubungan:

$$\begin{aligned} a_1 + iM = a_2 + i(M - a_1) &\Leftrightarrow a_1 + iM = a_2 + iM - ia_1 \\ &\Leftrightarrow a_1 = a_2 - ia_1 \\ &\Leftrightarrow a_2 = a_1 + ia_1 \\ &\Leftrightarrow a_2 = a_1(1 + i) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} a_2 + i(M - a_1) = a_3 + i(M - a_1 - a_2) &\Leftrightarrow a_2 + iM - ia_1 = a_3 + iM - ia_1 - ia_2 \\ &\Leftrightarrow a_2 = a_3 - ia_2 \\ &\Leftrightarrow a_3 = a_2 + ia_2 \\ &\Leftrightarrow a_3 = a_2(1 + i) \\ &\Leftrightarrow a_3 = a_1(1 + i)(1 + i) \quad \text{karena } a_2 = a_1(1 + i) \\ &\Leftrightarrow a_3 = a_1(1 + i)^2. \end{aligned}$$

Dengan cara serupa dapat ditarik kesimpulan bahwa rumus umum untuk pelunasan adalah:

$$a_n = a_n - 1\,(1 + i) \quad \text{atau} \quad a_n = a_1(1 + i)\; n - 1$$

Contoh 3.9.8

Seseorang mempunyai pinjaman uang sebesar Rp1.000.000,00 yang akan dilunasi dalam 12 anuitas tahunan. Anuitas pertama dibayar setahun setelah penerimaan pinjaman. Suku bunga yang berlaku 3% setiap tahun. Tentukan:

a. besarnya anuitas
b. besarnya pelunasan pinjaman dalam anuitas ke-9
c. besarnya sisa pinjaman setelah anuitas ke-9

Penyelesaian:

a. Dari soal tersebut diketahui:

$$M = \text{Rp}1.000.000,00$$
$$i = 0,03$$
$$n = 12.$$

Besarnya anuitas diperoleh dengan rumus, yaitu:

$$A = M \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^k}}$$

$$= 1.000.000 \frac{1}{\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{(1+0,03)^k}}$$

$$= 1.000.000\ (0,10046209)$$
$$= 100.462,09$$

Jadi, besarnya anuitas adalah Rp100.462,09.

b. Bunga dalam anuitas pertama adalah:

$$b_1 = 3\% \times 1.000.000 = 30.000$$

Pelunasan pinjaman dalam anuitas pertama adalah:

$$a_1 = A - b_1$$
$$= 100.462,09 - 30.000$$
$$= 70.462,09$$

Akibatnya, pelunasan pinjaman dalam anuitas ke-9 adalah:

$$a_9 = a_1\,(1 + i)^{9-1}$$
$$= 70.462,09\ (1,03)^8$$
$$= 70.462,09\ (1,26677008)$$
$$= 89.259,27$$

Jadi, besarnya pelunasan pada anuitas ke-9 adalah Rp89.259,27.

c. Untuk mencari sisa pinjaman setelah anuitas ke-9, dicari lebih dahulu besar bunga pada anuitas ke-10. Padahal besar bunga pada anuitas ke-10 sama dengan anuitas dikurangi pelunasan ke-10. Jadi, langkah yang pertama harus dicari lebih dahulu adalah pelunasan ke-10.

$$a_{10} = a_1\,(1 + i)^{10-1}$$
$$= 70.462,09\ (1,03)^9$$
$$= 70.462,09\ (1,30477318)$$
$$= 91.937,05$$

$$b_{10} = A - a_{10}$$
$$= 100.462,09 - 91.937,05$$
$$= 8.525,04$$

Bunga pada anuitas ke-10 (b_{10}) ini dihitung dari sisa utang setelah anuitas ke-9. Akibatnya,

$$b_{10} = 3\% \cdot \text{sisa}$$

$$\text{Sisa} = \frac{100}{3} b_{10}$$

$$= \frac{100}{3} 8.525,04$$

$= 8.525,04$

$= 284.168$

Jadi, sisa pinjaman setelah anuitas ke-9 adalah Rp284.168,00.

□

Latihan 3.9

1. Carilah nilai akhir sebuah modal sebesar Rp1.000.000,00 yang dibungakan dengan bunga majemuk dalam waktu 10 tahun, jika diperhitungkan bunga 6% per tahun.
2. Modal Rp5.000.000,00 dibungakan dengan dasar bunga majemuk per tahun. Setelah 10 tahun, modal tersebut menjadi Rp7.500.000,00. Berapa persen suku bunganya?
3. Sebuah modal ditabung di bank selama 5 tahun dengan suku bunga majemuk sebesar 6% per setengah tahun. Jika modal tersebut menjadi Rp1.250.000,00, berapakah modal awalnya?
4. Modal disimpan pada sebuah bank selama 5 tahun dengan bunga majemuk $3\frac{1}{2}\%$ per tahun dan kemudian dipindahkan ke bank lain dengan suku bunga 4% per tahun selama 6 tahun. Akhirnya modal tersebut menjadi Rp7.513.900,00. Berapakah besar modal awal yang disimpan tersebut?
5. Sebuah utang sebesar Rp15.000.000,00 dengan bunga 4% dilunasi dengan 12 anuitas. Hitunglah besarnya tiap-tiap anuitas.
6. Sebuah pinjaman sebesar Rp25.000.000,00 akan diangsur dengan anuitas tahunan. Besarnya tiap anuitas Rp210.000,00. Berapakah lama pinjaman itu diangsur, jika suku bunga yang berlaku adalah 3% per tahun?
7. Sebuah pinjaman sebesar Rp10.000.000,00 akan dilunasi dengan 10 anuitas tahunan. Anuitas pertama dibayar setelah 1 tahun. Suku bunga yang berlaku 5% per tahun. Tentukan besar tiap anuitas dan sisa utang setelah dibayar anuitas ke-8.

Rangkuman

1. Barisan dan Deret Aritmetika
   a. Pengertian Barisan Aritmetika
   Barisan u_1, u_2, u_3, ... disebut barisan aritmetika, jika berlaku $b = u_n - u_{n-1}$ sama untuk setiap bilangan asli n. Selanjutnya b dinamakan beda dari barisan tersebut.
   b. Rumus Suku ke-n Barisan Aritmetika
   Jika a merupakan suku pertama, b merupakan beda, dan u_n suku ke-n, maka:
   $$u_n = a + (n-1)b$$

c. Deret Aritmetika

Jika $u_1, u_2, u_3, \ldots$ merupakan barisan aritmetika, maka $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ disebut deret aritmetika. Jika a merupakan suku pertama, b merupakan beda, dan S_n merupakan jumlah n suku pertama, maka:

$$\frac{n}{2}[2a+(n-1)b]$$

2. Barisan dan Deret Geometri

a. Pengertian Barisan Geometri

Barisan $u_1, u_2, u_3, \ldots$ disebut barisan geometri, jika berlaku $r = \frac{u_n}{u_{n-1}}$ sama untuk setiap bilangan asli n. Selanjutnya r dinamakan rasio dari barisan geometri tersebut.

b. Rumus Suku ke-n Barisan Geometri

Jika a merupakan suku pertama, r merupakan rasio, dan u_n suku ke-n, maka:

$$u_n = ar^{n-1}$$

c. Deret Geometri

Jika $u_1, u_2, u_3, \ldots$ merupakan barisan geometri, maka $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ disebut deret geometri. Jika a merupakan suku pertama, r merupakan rasio, dan S_n merupakan jumlah n suku pertama maka:

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$$

d. Deret geometri tak hingga

Agar suatu deret geometri tak hingga konvergen, maka $|r| < 1$ dan jumlahnya adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

3. Notasi Sigma

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

4. Sifat-sifat Notasi Sigma

a. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

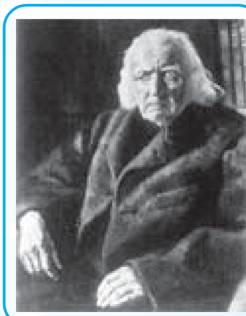
b. $\sum_{i=1}^{n} ku_i = k\sum_{i=1}^{n} u_i$

c. $\sum_{i=1}^{n} (u_i + vi) = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_i$

5. Prinsip Induksi Matematika
   Misalkan diberikan suatu pernyataan P_n untuk setiap bilangan asli n. Untuk membuktikan kebenaran pernyataan tersebut dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.
   a. Dibuktikan P_n benar untuk $n = 1$.
   b. Dianggap pernyataan P_n benar untuk $n = k$, kemudian dibuktikan pernyataan P_n benar untuk $n = k + 1$.

Math Info

Banyak nama yang dikaitkan dengan deret tak hingga, antara lain: Newton, Leibniz, Bernaulli, Taylor, Maclaurin, Euler, dan Lagrange, semuanya menggunakan deret dalam karyanya. Tetapi, Cauchy merupakan orang pertama yang memberikan definisi yang tepat tentang kekonvergenan, kemudian Karl Weierstrass melengkapi sifat-sifat dari deret fungsi dan menyusun kebenaran operasi-operasi yang terkait dengan teori deret, khususnya yang terkait dengan integrasi antara turunan dengan deret dan integral dengan deret. Weierstras adalah seorang pemikir metodis yang cermat. Ia bekerja dengan keras pada kevalidan yang lengkap di semua matematika dan menetapkan pembakuan-pembakuan yang diakui dan digunakan sampai sekarang.



Sumber: *www.wias-berlin.de*

Gambar 3.2 Karl Weierstrass

Uji Kompetensi

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Diketahui rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 2n + 5$. Suku ke-6 dari barisan tersebut adalah ... .
   A. 12   B. 17   C. 18   D. 25   E. 30

2. Jika suatu barisan aritmetika diketahui suku pertamanya $a = 5$ dan beda $b = -3$, maka suku ke-8 dari barisan aritmetika tersebut adalah ... .
   A. –16   B. –14   C. –12   D. –10   E. –7

3. Diketahui barisan aritmetika dengan $U_5 = 13$ dan $U_{10} = 33$. Nilai suku pertama dan beda dari barisan aritmetika tersebut adalah ... .
   A. 4 dan –3   B. –4 dan 3   C. 4 dan 3   D. –3 dan 4   E. 3 dan –4

4. Diketahui barisan aritmetika dengan jumlah n suku pertamanya adalah $S_n = 3n^2 - n$. Suku ke-8 dari barisan tersebut adalah ... .
   A. 20   B. 32   C. 52   D. 38   E. 44

5. Diketahui barisan aritmetika dengan $U_8 = 5$ dan $U_3 = -10$. Nilai suku pertama barisan tersebut adalah ... .
   A. –18   B. –17   C. –16   D. –12   E. –10

6. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika dengan jumlah 21. Apabila hasil kali ketiga bilangan tersebut adalah 168, maka selisih antara bilangan terbesar dengan yang terkecil adalah ... .
   A. 10   B. 8   C. 6   D. 5   E. 3

7. Jika rasio dari suatu barisan geometri adalah 3 dan suku ke-6 adalah 486, maka suku pertama barisan tersebut adalah ... .
   A. 6   B. 5   C. 4   D. 3   E. 2

8. Tiga buah bilangan merupakan tiga suku pertama dari suatu barisan geometri. Jumlah ketiga bilangan tersebut adalah 21 dan hasil kali tiga bilangan tersebut 216. Selisih bilangan terbesar dengan terkecil adalah ... .
   A. 9
   B. 6
   C. 4
   D. 3
   E. 2

9. Tiga bilangan, $p - 3$, $p - 1$, dan $2p + 1$, membentuk tiga suku pertama dari suatu barisan geometri. Jumlah lima suku pertama dari barisan tersebut adalah ... .
   A. 82
   B. 39
   C. 13
   D. 121
   E. 182

10. Setiap awal bulan, Susi menabung sejumlah uang di bank dengan besar yang selalu naik. Bulan pertama menabung Rp10.000,00, bulan kedua Rp12.000,00 bulan ketiga Rp14.000,00, dan seterusnya. Jumlah tabungan Susi setelah 10 bulan tanpa bunga adalah ... .
    A. Rp28.000,00
    B. Rp38.000,00
    C. Rp190.000,00
    D. Rp280.000,00
    E. Rp380.000,00

11. Jika diketahui bahwa $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah titik-titik pada interval $[a,b]$ dengan aturan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, maka nilai dari $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$ adalah ... .
    A. $a + b$
    B. a
    C. b
    D. $a - b$
    E. $b - a$

12. Nilai dari deret: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$ adalah ... .
    A. $\frac{1}{3}$
    B. $\frac{1}{2}$
    C. $\frac{2}{3}$
    D. 1
    E. 3

13. Sebuah perusahaan yang memproduksi mainan anak-anak, pada tahun pertama memproduksi 1.000 unit mainan. Setiap tahun perusahaan tersebut menaikkan produksinya sebesar 10%. Banyaknya produksi perusahaan tersebut pada tahun ke-10 dapat dinyatakan sebagai ... .
    A. $1.000 \times (1{,}1)^{10}$
    B. $1.000 \times (1{,}01)^{10}$
    C. 1.000^{10}
    D. $1.000 \times (1{,}1)^{9}$
    E. 10.000

14. Diketahui deret geometri: $1 + (2x - 5) + (2x - 5)^2 + \ldots$.
    Nilai x yang memenuhi agar deret tersebut konvergen adalah ... .
    A. $2 < x < 3$
    B. $1 < x < 2$
    C. $-6 < x < -4$
    D. $4 < x < 6$
    E. $-3 < x < -2$

15. Modal sebesar Rp100.000.000,00 diinvestasikan dengan dasar bunga majemuk sebesar 8% per tahun. Nilai akhir modal tersebut setelah 10 tahun adalah ... rupiah.
   A. $(100.000.000 \times 1{,}08)^9$
   B. $100.000.000 \times (1{,}08)^9$
   C. $100.000.000 \times (1{,}08)^{11}$
   D. $(100.000.000 \times 1{,}08)^{10}$
   E. $100.000.000 \times (1{,}08)^{10}$

B. Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan langkah-langkah yang tepat!

16. Suku ke-n suatu barisan memiliki rumus: $U_n = 5n^3 + 3n^2 + 2n - 4$. Gunakan paket aplikasi pengolah angka *MS Excel* untuk menentukan:
   a. suku ke-1 hingga suku ke-100 dari barisan tersebut
   b. jumlah 100 suku pertama dari barisan tersebut

17. Diketahui barisan aritmetika dengan suku pertama 11 dan suku ke-10 adalah –16. Tentukan:
   a. beda dan suku ke-n dari barisan tersebut
   b. jumlah n suku pertama dari barisan tersebut

18. Tentukan hasil dari jumlahan berikut.
   a. $\sum_{i=1}^{10} \left(i^2 + 2i + 5\right)$
   b. $\sum_{i=1}^{10} \left[F(x_k) - F(x_{k-1})\right]$

19. Anita menginvestasikan modal sebesar Rp200.000.000,00 di sebuah bank yang menggunakan sistem bunga majemuk. Jika pihak bank memberikan bunga sebesar 10% per tahun, berapakah besar modal setelah 10 tahun?

20. Pak Ali meminjam uang sebesar Rp50.000.000,00 di sebuah bank dan akan dilunasi dengan anuitas setiap akhir bulan selama 30 bulan. Suku bunga yang berlaku di bank tersebut adalah $1\frac{1}{2}\%$ per bulan.
   a. Tentukan besar anuitas setiap bulan.
   b. Tentukan besar angsuran ke-10.
   c. Buatlah tabel rencana angsuran tersebut dengan menggunakan paket aplikasi pengolah angka *Microsoft Excel*.

Soal Analisis

1. Maman berutang kepada Yayuk sebesar Rp100.000,00. Maman berjanji untuk mengembalikan utangnya setiap bulan Rp10.000,00 ditambah dengan bunganya 2% per bulan dari sisa pinjamannya. Berapa jumlah bunga yang dibayarkan sampai utangnya lunas?

2. Selama 5 bulan berturut-turut, jumlah penduduk Kota Damai berbentuk deret geometri. Pada tahun terakhir jumlah penduduknya 4 juta, sedangkan jumlah tahun pertama dan ketiga sama dengan $1\frac{1}{4}$ juta. Berapakah jumlah penduduk Kota Damai pada tahun ke-4?

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama : ....
Tanggal : ....
Kelas : XII
Materi Pokok : Barisan dan Deret
Kelompok : ....
Semester : 2 (dua)
Kegiatan : Memotong tali sehingga membentuk barisan aritmetika
Tujuan : Menentukan rumus suku ke-n barisan aritmetika

A. Alat dan Bahan yang Digunakan

1. Tali rafia dengan panjang 875 cm
2. Meteran
3. Gunting
4. Alat pencatat
5. Buku catatan

B. Cara Kerja

1. Buatlah kelompok yang terdiri dari 4 atau 5 siswa.
2. Tali akan dipotong menjadi 10 bagian, sehingga membentuk barisan aritmetika.
3. Anggap panjang tali sebagai jumlah n suku pertama dari deret aritmetika.
4. Pertama, potonglah tali sepanjang 20 cm. Anggap ini sebagai suku pertama dari barisan aritmetika.
5. Untuk memotong tali berikutnya, tetapkan dahulu nilai dari n, a, dan S_n.

C. Analisis

1. Dari hasil percobaan Anda, berapakah beda dari barisan aritmetika di atas?
2. Berapakah panjang potongan ke-10 tali itu?

Teka-Teki Matematika

Bujur Sangkar Magis

Perhatikan gambar di bawah ini.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Bujur sangkar di atas disebut bujur sangkar magis atau ajaib (*magic square*) derajat 3, karena ada 3^2 atau 9 bujur sangkar yang kecil-kecil dan jumlah bilangan-bilangan itu menurut baris, lajur, dan diagonalnya sama, yaitu 15.

Untuk bujur sangkar magis derajat n, Anda dapat menghitung jumlah bilangan-bilangan menurut baris, lajur, atau diagonal. Dalam bujur sangkar magis derajat n, ada n^2 buah bujur sangkar kecil. Bila bilangan yang paling kecil dalam kotak-kotak kecil itu 1, maka bilangan yang paling besar ialah n^2. Jadi Anda harus menjumlahkan 1, 2, 3, ... , n^2 dulu, lalu membaginya dengan n. Dengan menggunakan rumus deret hitung ($a = 1$, $b = 1$, dan banyaknya suku n^2),

$$D_n^{\,2} = \frac{1}{2} n^2 (1 + n^2)$$

Jadi, $n^2 (1 + n^2)$ itu ialah jumlah seluruh bilangan dari n^2 buah bujur sangkar kecil-kecil. Karena itu jumlah dalam 1 baris saja, 1 lajur saja, atau satu diagonal saja sama dengan $D_n^{\,2} : n$

atau

$$\frac{\frac{1}{2} n^2 \left(1 + n^2\right)}{n} = \frac{1}{2} n \left(1 + n^2\right)$$

Dengan rumus itu, Anda dapat menghitung jumlah bilangan menurut baris atau menurut lajur atau menurut diagonal dalam setiap bujur sangkar magis, bila bilangan pertama dan bilangan-bilangan berikutnya diketahui.

Sekarang coba lengkapilah bujur sangkar magis derajat 4 berikut.

16		2	
	10		8
9			
	15		1

Latihan Ulangan Umum Semester 2

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 30, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Diketahui barisan sebagai berikut.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \ldots$$

Rumus suku ke-n dari barisan tersebut adalah ... .

A. $\frac{1}{n+1}$
D. $\frac{1}{n^2-1}$
B. $\frac{1}{n+3}$
E. $\frac{1}{n^2+3}$
C. $\frac{1}{n^2+1}$

2. Rumus suku ke-n dari barisan: –2, 4, –8, 16, ... adalah ... .

A. $(-2)^n$
D. $(2)^n$
B. $(-2)^{n-1}$
E. $-2n$
C. $(2)^{-n}$

3. Diketahui rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 3n + 5$. Suku ke-10 dari barisan tersebut adalah ... .

A. 12
D. 25
B. 17
E. 35
C. 18

4. Jika suatu barisan aritmetika diketahui suku pertamanya adalah $a = 8$ dan bedanya $b = 3$, maka suku ke-12 dari barisan aritmetika tersebut adalah ... .

A. 41
D. 20
B. 36
E. 18
C. 33

5. Diketahui barisan aritmetika dengan $U_5 = 13$ dan $U_{10} = 33$. Nilai suku pertama dan beda dari barisan aritmetika tersebut adalah ... .

A. 4 dan –3
D. –3 dan 4
B. –4 dan 3
E. 3 dan –4
C. 4 dan 3

6. Diketahui barisan aritmetika dengan jumlah n suku pertamanya adalah $S_n = 3n^2 - n$. Suku ke-8 dari barisan tersebut adalah ... .

A. 20
D. 38
B. 32
E. 44
C. 36

7. Diketahui barisan aritmetika dengan suku ke-7 adalah 4 dan suku ke-11 adalah 28. Suku pertama dan beda dari barisan tersebut adalah ... .
A. –5 dan 3
B. –2 dan 3
C. 3 dan –2
D. –32 dan 6
E. –38 dan 6

8. Suku ke-n dari deret geometri adalah 2^n, dengan n adalah bilangan asli. Jika $S_n > 200$, maka banyaknya suku paling sedikit adalah ... .
A. 6
B. 7
C. 8
D. 9
E. 10

9. Untuk suatu nilai k, bilangan $k - 3$, $k - 1$, dan $2k + 1$ membentuk tiga suku pertama dari barisan geometri. Suku kelima dari barisan geometri tersebut adalah ... .
A. –1
B. 4
C. 9
D. 81
E. 243

10. Sepuluh tahun yang lalu umur Budi dua kali umur Ani, lima tahun kemudian umur Budi menjadi $1\frac{1}{2}$ kali umur Ani. Umur Budi sekarang adalah ... tahun.
A. 40
B. 35
C. 30
D. 25
E. 20

11. Dari suatu barisan aritmetika diketahui suku ke-4 adalah 7 dan suku ke-10 adalah 25. Suku ke-15 barisan aritmetika ini adalah ... .
A. 43
B. 40
C. 39
D. 37
E. 36

12. Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika adalah $S_n = n^2 - 2n$. Suku ke-10 dari deret tersebut adalah ... .
A. 15
B. 16
C. 17
D. 63
E. 80

13. Sisi-sisi suatu segitiga siku-siku membentuk suatu barisan aritmetika. Jika sisi miringnya 40 cm, maka sisi siku-siku yang terpendek adalah ... cm.
A. 8
B. 16
C. 20
D. 24
E. 32

14. Penjumlahan 4 + 7 + 10 + ... + 25 dapat dinyatakan dalam notasi sigma dengan ... .
A. $\sum_{i=0}^{7} (3i+1)$
B. $\sum_{i=0}^{8} (3i+1)$
C. $\sum_{i=0}^{7} (5i+1)$
D. $\sum_{i=1}^{8} (3i+1)$
E. $\sum_{i=0}^{7} (4-3i)$

15. Jika $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, maka nilai dari $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$ adalah ... .

A. $b + a$
B. $a - b$
C. a
D. $b - a$
E. b

16. Nilai dari $\sum_{i=1}^{n} (3i - 2)$ adalah ... .

A. $n(3n\text{-}2)$
B. $\frac{n(3n-1)}{2}$
C. $n(n+1)$
D. $(3n - 2)$
E. $\frac{3n-2}{2}$

17. Jika diketahui $\sum_{i=1}^{n} i = x$ dan $\sum_{j=1}^{n} k = y$, maka $\sum_{i=1}^{n} (2i - k) = ...$.

A. $2x - y$
B. $2x - ny$
C. $x - ny$
D. $x - y$
E. $2nx - ny$

18. Sebuah modal sebesar M rupiah ditabung di suatu bank dengan aturan bunga tunggal sebesar 2% per bulan. Setelah ditabung selama 5 tahun, besar modal tersebut akan menjadi ... .

A. $5M$
B. $6M$
C. $8M$
D. $10M$
E. $12M$

19. Budi menabung sebesar Rp1.000.000,00 di sebuah bank dengan bunga majemuk 1% per bulan, sedangkan Ani menabung Rp1.000.000,00 di bank lain dengan bunga tunggal sebesar 2% per bulan. Setelah 1 tahun, besar tabungan Budi ... tabungan Ani.

A. lebih besar dari
B. sama dengan
C. 2 kali
D. lebih kecil dari
E. $\frac{1}{2}$ kali

20. Nilai dari deret: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...$ adalah ... .

A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{2}{3}$
D. 1
E. $\frac{3}{2}$

21. Jumlah deret: (–1) + 1 + (–1) + 1 + ... + $(-1)^n$ adalah ... .
A. 1 untuk n genap
B. –1 untuk n genap
C. 0 untuk n ganjil
D. 1 untuk n ganjil
E. –1 untuk n ganjil

22. Jika $\sum_{i=5}^{11}(2i-5)$ diubah dengan batas bawah 1, maka hasilnya menjadi ... .
A. $\sum_{i=1}^{8}(13-2i)$
B. $\sum_{i=1}^{8}(3-2i)$
C. $\sum_{i=1}^{7}(2i-3)$
D. $\sum_{i=1}^{7}(2i-13)$
E. $\sum_{i=1}^{7}(2i-3)$

23. Suatu perusahaan memproduksi 1.000 satuan barang pada tahun pertama. Setiap tahun perusahaan tersebut menaikkan produksinya sebesar 200 satuan barang. Banyaknya produksi pada tahun ke-10 adalah ... satuan barang
A. 2.000
B. 2.200
C. 2.400
D. 2.800
E. 3.000

24. Tiap-tiap awal bulan, Rizqa menabung uang di bank sebesar Rp200.000,00. Bank tersebut memberikan bunga majemuk sebesar 1% setiap bulan. Pada akhir bulan ke-8, semua uang Rizqa diambil. Besar uang Rizqa adalah ... .
A. Rp216.571,00
B. Rp220.816,00
C. Rp225.232,00
D. Rp229.737,00
E. Rp234.331,00

25. Tiga buah bilangan membentuk barisan geometri, jumlahnya adalah 130. Jika suku pertama ditambah suku ketiga sama dengan dua kali suku kedua ditambah 40, maka ketiga bilangan tersebut adalah ... .
A. 10, 30, dan 90
B. 10, 50, dan 70
C. –10, 50, dan 90
D. –10, 40, dan 110
E. –10, 40, dan 100

26. Tiga buah bilangan membentuk barisan geometri yang jumlahnya 21 dan suku tengahnya 6. Suku ke-5 barisan tersebut adalah ... .
A. 42
B. 48
C. 72
D. 84
E. 96

27. Jika diketahui bahwa $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah titik-titik pada interval $[a,b]$ dengan aturan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Nilai dari $\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right]$ adalah ... .
A. $f(a) + f(b)$
B. $f(a)$
C. $f(b)$
D. $f(a) - f(b)$
E. $f(b) - f(a)$

28. Nilai dari deret: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{7^i} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \ldots$ adalah ... .

A. $\frac{1}{7}$
B. $\frac{1}{6}$
C. $\frac{6}{7}$
D. 1
E. 7

29. Diketahui deret geometri: $1 + (5x - 4) + (5x - 4)^2 + \ldots$.
Nilai x yang memenuhi agar deret tersebut konvergen adalah ... .

A. $\frac{3}{5} < x < 1$
B. $-\frac{3}{5} < x < 1$
C. $0 < x < \frac{3}{5}$
D. $1 < x < 3$
E. $3 < x < 5$

30. Modal sebesar Rp200.000.000,00 diinvestasikan dengan dasar bunga majemuk sebesar 5% per tahun. Nilai akhir modal tersebut setelah 12 tahun adalah ... rupiah.

A. $(200.000.000 \times 1,05)^{11}$
B. $200.000.000 \times (1,05)^{11}$
C. $200.000.000 \times (1,05)^{13}$
D. $(200.000.000 \times 1,08)^{12}$
E. $200.000.000 \times (1,08)^{12}$

B. Untuk soal nomor 31 sampai dengan nomor 40, kerjakan dengan langkah-langkah yang tepat!

31. Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika adalah $S_n = 2n^2 - n$. Tentukan:
   a. rumus umum suku ke-n
   b. beda barisan tersebut
   c. suku ke-4 barisan tersebut

32. Jumlah sampai suku ke-n suatu deret geometri adalah S_n. Jika $S_n = 150$, $S_{n+1} = 160$, dan $S_{n+2} = 165$, tentukan rasio deret tersebut.

33. Jumlah tiga suku pertama deret aritmetika adalah 21, sedangkan hasil kalinya 280. Jika semua suku deret aritmetika ini positif, tentukan:
   a. suku pertama
   b. beda
   c. jumlah 10 suku pertama deret tersebut

34. Hitunglah nilai dari:
   a. $\sum_{k=-5}^{5} \frac{1}{2^k + 1}$
   b. $\sum_{k=1}^{2.010} \frac{1}{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}$

35. Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa:

$9^n - 2^n$ habis dibagi 7 untuk setiap bilangan asli n

36. Modal Rp50.000.000,00 dibungakan dengan dasar bunga majemuk per tahun. Setelah 10 tahun modal tersebut menjadi Rp60.000.000,00. Berapa persen suku bunganya?

37. Budi menginvestasikan modal sebesar Rp100.000.000,00 di sebuah bank yang menggunakan sistem bunga majemuk. Jika pihak bank memberikan bunga sebesar 8% per tahun, berapakah besar modal setelah 12 tahun?

38. Bu Ani meminjam uang sebesar Rp15.000.000,00 di sebuah bank dan akan dilunasi dengan anuitas setiap akhir bulan selama 36 bulan. Suku bunga yang berlaku di bank tersebut adalah 1,75 % per bulan.
    a. Tentukan besar anuitas setiap bulan.
    b. Tentukan besar angsuran ke-10.
    c. Buatlah tabel rencana angsuran tersebut dengan menggunakan paket aplikasi pengolah angka *Microsoft Excel*.

39. Sebuah pinjaman sebesar Rp15.000.000,00 akan diangsur dengan anuitas tahunan. Besarnya tiap anuitas Rp528.000,00. Berapakah lama pinjaman itu diangsur, jika suku bunga yang berlaku adalah 1,75 % per tahun?

40. Sebuah pinjaman sebesar Rp50.000.000,00 akan dilunasi dengan 48 anuitas bulanan. Anuitas pertama dibayar setelah 1 bulan. Suku bunga yang berlaku 8% per tahun. Tentukan besar tiap anuitas dan sisa utang setelah dibayar anuitas ke-12.

Daftar Pustaka

Andi Hakim Nasution. 1982. *Landasan Matematika*. Jakarta: Bharata Karya Aksara.

Andi Hakim Nasution. 1994. *Matematika I*. Jakarta: Balai Pustaka.

Anton, H. 1995. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Bettinger, A.K, Hutchion, G.A, and Englund. 1966. *Algebra and Trigonometry*. Pennsylvania: International Textbook Company, Seranton.

Departemen Pendidikan Nasional. 2007. *Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah*. Jakarta: Pusat Kurikulum Balitbang Depdiknas.

Neill, H. and Quadling, D. 2002. *Advanced Level Mathematics "Pure Mathematics I"*. University Press, Cambridge, United Kingdom.

P. Siagian. 1987. *Penelitian Operasional*. Jakarta: Universitas Indonesia.

Suwah Sembiring. 1986. *Matematika*. Bandung: Ganeca Exact.

Glosarium

barisan aritmetika	:	barisan yang mempunyai beda atau selisih yang tetap antara suku-suku yang berurutan, sebagai contoh: 3, 6, 9, 12, ... merupakan barisan aritmetika dengan beda 3.
barisan geometri	:	barisan yang mempunyai rasio atau perbandingan yang tetap antara suku-suku yang berurutan, sebagai contoh: 1, 5, 25, 125, ... merupakan barisan geometri dengan rasio 5.
deret	:	jumlah suku-suku dari suatu barisan.
deret aritmetika	:	jumlah suku-suku dari suatu barisan aritmetika, sebagai contoh: $2 + 5 + 8 + \ldots$.
deret geometri	:	jumlah suku-suku dari suatu barisan geometri, sebagai contoh: $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$.
deret tak hingga	:	deret yang tidak mempunyai suku akhir (banyaknya suku tak hingga), sebagai contoh: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$.
deret konvergen	:	deret yang jumlahnya ada (merupakan bilangan real, sebagai contoh: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ merupakan deret yang konvergen ke-2.
deret divergen	:	deret yang tidak mempunyai jumlah, sebagai contoh: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$.
himpunan penyelesaian	:	himpunan yang memuat semua penyelesaian persamaan atau pertidaksamaan.
matriks	:	susunan bilangan-bilangan yang membentuk persegi panjang dan diapit dengan tanda kurung biasa atau kurung tegak.
matriks baris	:	matriks yang terdiri dari satu baris.
matriks diagonal	:	matriks yang entri-entri di luar diagonal utamanya adalah nol.
matriks kolom	:	matriks yang terdiri dari satu kolom.

matriks identitas	:	matriks yang semua entri di diagonal utama adalah 1 dan selainnya nol. Matriks identitas dinotasikan dengan I dan bersifat $AI = A = IA$ untuk setiap matriks persegi A.
matriks nol	:	matriks yang semua entrinya adalah nol dan dinotasikan dengan 0 dan bersifat $A + 0 = A = 0 + A$ untuk setiap matriks A yang ordonya sama dengan 0.
matriks segitiga atas	:	matriks yang semua entri di bawah diagonal utama merupakan bilangan nol.
matriks segitiga bawah	:	matriks yang semua entri di atas diagonal utama merupakan bilangan nol.
matriks singular	:	matriks yang determinannya sama dengan nol.
matriks nonsingular	:	matriks yang determinannya tidak sama dengan nol.
matriks invers	:	invers matriks A adalah matriks lain B yang memenuhi sifat $AB = I = BA$ dengan I adalah matriks identitas.
model matematika	:	suatu sistem persamaan atau pertidaksamaan matematika yang merupakan representasi dari fenomena kehidupan nyata.
notasi sigma	:	notasi yang menggunakan huruf Yunani $\sum$, merupakan penyederhaaan tulisan penjumlahan yang panjang.
ordo	:	ukuran matriks, matriks dengan banyaknya baris m dan banyaknya kolom n dikatakan berordo $m \times n$.
program linear	:	suatu cara atau metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang terkait dengan optimisasi (maksimisasi atau minimisasi) dari fungsi tujuan (objektif) terhadap fungsi-fungsi kendala yang ada.
sistem persamaan linear	:	kumpulan dari beberapa persamaan linear yang membentuk kesatuan.
sistem pertidaksamaan linear	:	kumpulan dari beberapa pertidaksamaan linear yang membentuk satu kesatuan.
skalar	:	suatu besaran yang dapat diukur dengan bilangan real.
suku	:	bagian dari barisan yang dipisahkan oleh koma " , " atau bagian dari deret yang dipisahkan oleh " + ".
transpose matriks	:	transpose matriks A adalah matriks lain yang dibentuk dari menukarkan semua baris A menjadi kolom matriks baru tersebut.

Indeks

Lampiran

Logaritma Bilangan $^{10}\log x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.000	004	009	013	017	021	025	029	033	037
1.1	.041	045	049	053	057	061	064	068	072	076
1.2	.079	083	086	090	093	097	100	104	107	111
1.3	.114	117	121	124	127	130	134	137	140	143
1.4	.146	149	152	155	158	161	164	167	170	173
1.5	.176	179	182	185	188	190	193	196	199	201
1.6	.204	207	210	212	215	217	220	223	225	228
1.7	.230	233	236	238	241	243	246	248	250	253
1.8	.255	258	260	262	265	267	270	272	274	276
1.9	.279	281	283	286	288	290	292	294	297	299
2.0	.301	303	305	307	310	312	314	316	318	320
2.1	.322	324	326	328	330	332	334	336	338	340
2.2	.342	344	346	348	350	352	354	356	358	360
2.3	.362	364	365	367	369	371	373	375	377	378
2.4	.380	382	384	386	387	389	391	393	394	396
2.5	.398	400	401	403	405	407	408	410	412	413
2.6	.415	417	418	420	422	423	425	427	428	430
2.7	.431	433	435	436	438	439	441	442	444	446
2.8	.447	449	450	452	453	455	456	458	459	461
2.9	.462	464	465	467	468	470	471	473	474	476
3.0	.477	479	480	481	483	484	486	487	489	490
3.1	.491	493	494	496	497	498	500	501	502	504
3.2	.505	507	508	509	511	512	513	515	516	517
3.3	.519	520	521	522	524	525	526	528	529	530
3.4	.531	533	534	535	537	538	539	540	542	543
3.5	.544	545	547	548	549	550	551	553	554	555
3.6	.556	558	559	560	561	562	563	565	566	567
3.7	.568	569	571	572	573	574	575	576	577	579
3.8	.580	581	582	583	584	585	587	588	589	590
3.9	.591	592	593	594	595	597	598	599	600	601
4.0	.602	603	604	605	606	607	609	610	611	612
4.1	.613	614	615	616	617	618	619	620	621	622
4.2	.623	624	625	626	627	628	629	630	631	632
4.3	.633	634	635	636	637	638	639	640	641	642
4.4	.643	644	645	646	647	648	649	650	651	652

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	.653	654	655	656	657	658	659	660	661	662
4.6	.663	664	665	666	667	667	668	669	670	671
4.7	.672	673	674	675	676	677	678	679	679	680
4.8	.681	682	683	684	685	686	687	688	688	689
4.9	.690	691	692	693	694	695	695	696	697	698
5.0	.699	700	701	702	702	703	704	705	706	707
5.1	.708	708	709	710	711	712	713	713	714	715
5.2	.716	717	718	719	719	720	721	722	723	723
5.3	.724	725	726	727	728	728	729	730	731	732
5.4	.732	733	734	735	736	736	737	738	739	740
5.5	.740	741	742	743	744	744	745	746	747	747
5.6	.748	749	750	751	751	752	753	754	754	755
5.7	.756	757	757	758	759	760	760	761	762	763
5.8	.763	764	765	766	766	767	768	769	769	770
5.9	.771	772	772	773	774	775	775	776	777	777
6.0	.778	779	780	780	781	782	782	783	784	785
6.1	.785	786	787	787	788	789	790	790	791	792
6.2	.792	793	794	794	795	796	797	797	798	799
6.3	.799	800	801	801	802	803	803	804	805	806
6.4	.806	807	808	808	809	810	810	811	812	812
6.5	.813	814	814	815	816	816	817	818	818	819
6.6	.820	820	821	822	822	823	823	824	825	825
6.7	.826	827	827	828	829	829	830	831	831	832
6.8	.833	833	834	834	835	836	836	837	838	838
6.9	.839	839	840	841	841	842	843	843	844	844
7.0	.845	846	846	847	848	848	849	849	850	851
7.1	.851	852	852	853	854	854	855	856	856	857
7.2	.857	858	859	859	860	860	861	862	862	863
7.3	.863	864	865	865	866	866	867	867	868	869
7.4	.869	870	870	871	872	972	873	873	874	874
7.5	.875	876	876	877	877	878	879	879	880	880
7.6	.881	881	882	883	883	884	884	885	885	886
7.7	.886	887	888	888	889	889	890	890	891	892
7.8	.892	893	893	894	894	895	895	896	897	897
7.9	.898	898	899	899	900	900	901	901	902	903

Logaritma Bilangan $^{10}\log x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8.0	.903	904	904	905	905	906	906	907	907	908
8.1	.908	909	910	910	911	911	912	912	913	913
8.2	.914	914	915	915	916	916	917	918	918	919
8.3	.919	920	920	921	921	922	922	923	923	924
8.4	.924	925	925	926	926	927	927	928	928	929
8.5	.929	930	930	931	931	932	932	933	933	934
8.6	.934	935	936	936	937	937	938	938	939	939
8.7	.940	940	941	941	942	942	943	943	943	944
8.8	.944	945	945	946	946	947	947	948	948	949
8.9	.949	950	950	951	951	952	952	953	953	954
9.0	.954	955	955	956	956	957	957	958	958	959
9.1	.959	960	960	960	961	961	962	962	963	963
9.2	.964	964	965	965	966	966	967	967	968	968
9.3	.968	969	969	970	970	971	971	972	972	973
9.4	.973	974	974	975	975	975	976	976	977	977
9.5	.978	978	979	979	980	980	980	981	981	982
9.6	.982	983	983	984	984	985	985	985	986	986
9.7	.987	987	988	988	989	989	989	990	990	991
9.8	.991	992	992	993	993	993	994	994	995	995
9.9	.996	996	997	997	997	998	998	999	999	1.000

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	100	100	100	101	101	101	101	102	102	102
.01	102	103	103	103	103	104	104	104	104	104
.02	105	105	105	105	106	106	106	106	107	107
.03	107	107	108	108	108	108	109	109	109	109
.04	110	110	110	110	111	111	111	111	112	112
.05	112	112	113	113	113	114	114	114	114	115
.06	115	115	115	116	116	116	116	117	117	117
.07	117	118	118	118	119	119	119	119	120	120
.08	120	121	121	121	121	122	122	122	122	123
.09	123	123	124	124	124	124	125	125	125	126
.10	126	126	126	127	127	127	128	128	128	129
.11	129	129	129	130	130	130	131	131	131	132
.12	132	132	132	133	133	133	134	134	134	135
.13	135	135	136	136	136	136	137	137	137	138
.14	138	138	139	139	139	140	140	140	141	141
.15	141	142	142	142	143	143	143	144	144	144
.16	145	145	145	146	146	146	147	147	147	148
.17	148	148	149	149	149	150	150	150	151	151
.18	151	152	152	152	153	153	153	154	154	155
.19	155	155	156	156	156	157	157	157	158	158
.20	158	159	159	160	160	160	161	161	161	162
.21	162	163	163	163	164	164	164	165	165	166
.22	166	166	167	167	167	168	168	169	169	169
.23	170	170	171	171	171	172	172	173	173	173
.24	174	174	175	175	175	176	176	177	177	177
.25	178	178	179	179	179	180	180	181	181	182
.26	182	182	183	183	184	184	185	185	185	186
.27	186	187	187	188	188	188	189	189	190	190
.28	191	191	191	192	192	193	193	194	194	195
.29	195	195	196	196	197	197	198	198	199	199
.30	200	200	200	201	201	202	202	203	203	204
.31	204	205	205	206	206	207	207	207	208	208
.32	209	209	210	210	211	211	212	212	213	213
.33	214	214	215	215	216	216	217	217	218	218
.34	219	219	220	220	221	221	222	222	223	223

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.35	224	224	225	225	226	226	227	228	228	229
.36	229	230	230	231	231	232	232	233	233	234
.37	234	235	236	236	237	237	238	238	239	239
.38	240	240	241	242	242	243	243	244	244	245
.39	245	246	247	247	248	248	249	249	250	251
.40	251	252	252	253	254	254	255	255	256	256
.41	257	258	258	259	259	260	261	261	262	262
.42	263	264	264	265	265	266	267	267	268	269
.43	269	270	270	271	272	272	273	274	274	275
.44	275	276	277	277	278	279	279	280	281	281
.45	282	282	283	284	284	285	286	286	287	288
.46	288	289	290	290	291	291	292	293	294	294
.47	295	296	296	297	298	299	299	300	301	301
.48	302	303	303	304	305	305	306	307	308	308
.49	309	310	310	311	312	313	313	314	315	316
.50	316	317	318	318	319	320	321	321	322	323
.51	324	324	325	326	327	327	328	329	330	330
.52	331	332	333	333	334	335	336	337	337	338
.53	339	340	340	341	342	343	344	344	345	346
.54	347	348	348	349	350	351	352	352	353	354
.55	355	356	356	357	358	359	360	361	361	362
.56	363	364	365	366	366	367	368	369	370	371
.57	372	372	373	374	375	376	377	378	378	379
.58	380	381	382	383	384	385	385	386	387	388
.59	389	390	391	392	393	394	394	395	396	397
.60	398	399	400	401	402	403	404	405	406	406
.61	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416
.62	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426
.63	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436
.64	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446
.65	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456
.66	457	458	459	460	461	462	463	465	466	467
.67	468	469	470	471	472	473	474	475	476	478
.68	479	480	481	482	483	484	485	486	488	489
.69	490	491	492	493	494	495	497	498	499	500

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.70	501	502	504	505	506	507	508	509	511	512
.71	513	514	515	516	518	519	520	521	522	524
.72	525	526	527	528	530	531	532	533	535	536
.73	537	538	540	541	542	543	545	546	547	548
.74	550	551	552	553	555	556	557	558	560	561
.75	562	564	565	566	568	569	570	571	573	574
.76	575	577	578	579	581	582	583	585	586	587
.77	589	590	592	593	594	596	597	598	600	601
.78	603	604	605	607	608	610	611	612	614	615
.79	617	618	619	621	622	624	625	627	628	630
.80	631	632	634	635	637	638	640	641	643	644
.81	646	647	649	650	652	653	655	656	658	659
.82	661	662	664	665	667	668	670	671	673	675
.83	676	678	679	681	682	684	685	687	689	690
.84	692	693	695	697	698	700	701	703	705	706
.85	708	710	711	713	714	716	718	719	721	723
.86	724	726	728	729	731	733	735	736	738	740
.87	741	743	745	746	748	750	752	753	755	757
.88	759	760	762	764	766	767	769	771	773	774
.89	776	778	780	782	783	785	787	789	791	793
.90	794	796	798	800	802	804	805	807	809	811
.91	813	815	817	818	820	822	824	826	828	830
.92	832	834	836	838	839	841	843	845	847	849
.93	851	853	855	857	859	861	863	865	867	869
.94	871	873	875	877	879	881	883	885	887	889
.95	891	893	895	897	899	902	904	906	908	910
.96	912	914	916	918	920	923	925	927	929	931
.97	933	935	938	940	942	944	946	948	951	953
.98	955	957	959	962	964	966	968	971	973	975
.99	977	979	982	984	986	989	991	993	995	998

III Daftar untuk $\Sigma(1{,}015)^n$; $\Sigma(1{,}02)^n$; $\Sigma(1{,}025)^n$; $\Sigma(1{,}03)^n$; $\Sigma(1{,}035)^n$ dimulai dengan $n = 1$

$s_{\overline{n}|}$

n	$1\frac{1}{2}\%$	2%	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$
1	1,015	1,102	1,025	1,03	1,035
2	2,045225	2,0604	2,075625	2,00909	2,106225
3	3,09090338	3,121608	3,15251563	4,30913581	4,36246588
4	4,15226693	4,20404016	4,25632852	4,30913581	4,36246588
5	5,22955093	5,30812096	5,38773673	5,46840988	5,55015218
6	6,32299419	6,43428338	6,54748015	6,66246218	6,77940751
7	7,43283911	7,58296905	7,73611590	7,89233605	8,05168677
8	8,55933169	8,75462843	8,95451880	9,15910613	9,36849581
9	9,70272167	9,94742100	10,20338177	10,46387931	10,7339316
10	10,86326249	11,16871542	11,48846631	11,80779569	12,14199192
11	12,04121143	12,41208973	12,79555297	13,19202945	13,11303030
12	13,23682960	13,68033152	14,14044179	14,61779045	15,11303030
13	14,4038205	14,97393815	15,51895284	16,08632418	16,67698636
14	15,68213778	16,29341692	16,93192666	17,59891339	18,29563088
15	16,93236984	17,63928525	18,38022433	19,15688130	19,97102971
16	18,20135539	19,01207096	19,86643045	20,76158774	21,70501575
17	19,48987572	20,41231238	21,33634871	22,41443537	23,49969130
18	20,79671636	21,84055663	22,94300743	24,11686844	25,35718050
19	22.12366710	23,29736980	24,54465761	25,87037448	27,27968181
20	23,47052211	24,78331710	26,18327405	27,67643572	29,26947063
21	24,83757994	26,29898354	27,86285590	29,53673030	31,32890125
22	26,22514364	27,84496321	29,58442730	31,45288370	33,46041373
22	27,63352080	29,42186247	31,34903798	33,42647022	35,66652821
24	29,06302361	31,03029972	33,15776399	35,45926432	37,94985669
25	30,51396896	32,67090572	35,01170803	37,55304225	40,31310168
26	31,98667850	34,34432383	36,91200073	39,70963352	42,75906024
27	33,48147867	36,56807931	38,85980075	41,93092252	45,20062734
28	34,99870085	37,79228451	40,85629577	44,21885020	47,91079930
29	36,53863137	39,56807921	42,90270316	46,57541571	50,62267728
30	38,10176159	41,37944079	45,00027074	49,00267818	53,42947098
31	39,68828801	43,22702961	47,15027751	51,50275852	56,33450247
32	41,29861233	45,11157020	49,35403445	54,07784128	59,34121005
33	42,93309152	47,03380160	51,61288531	56,73017650	62,45315240
34	44,59208789	48,99447763	52,92320744	59,46508181	65,67401274
35	46,27596921	50,99,436719	56,30141263	62,27594427	69,00760318
36	47,98510874	55,11493962	58,73394794	65,17422259	72,45786930
37	49,71988538	57,23723841	61,22729664	68,15944927	76,02889472
38	51,48068366	59,40198318	63,78297906	71,23423275	79,72490604
39	53,26789391	61,61002284	66,46255354	74,40125973	83,55027775
40	55,08191232	63,86222330	69,08761737	77,66329753	87,50953742
41	56,92314200	66,15946777	71,83930781	81,02319645	91,60737128
42	58,79198812	68,50265712	74,66080300	84,48389234	95,84862928
43	60,68886794	70,89271027	77,55232308	88,04840911	100,23833130
44	62,61420096	73,33056447	80,51613116	91,71986139	104,78167290
45	64,56841398	73,33056447	83,55403443	95,50145723	109,48403145
46	66,55194018	75,81717576	86,66788530	99,39650095	114,35097255
47	68,56521929	78,35351927	89,85958243	103,40839598	119,38825659
48	70,60869758	80,94058966	93,13107199	107,54064785	124,60184557
49	72,68282804	83,57940145	96,48434879	111,79686729	129,99791016
50	74,78807088	86,27088948	99,92145751	116,18077331	135,58283702

III Daftar untuk $\Sigma(1,4)^n$; $\Sigma(1,045)^n$; $\Sigma(1,05)^n$; $\Sigma(1,055)^n$; $\Sigma(1,06)^n$

dimulai dengan $n = 1$

$s_{\overline{n}|}$

n	4%	$4\frac{1}{2}$%	5%	$5\frac{1}{2}$%	6%
1	1,04	1,045	1,05	1,055	1,06
2	2,1216	2,137025	2,151525	2,168025	2,1838
3	3,246464	3,27819113	3,310125	3,34226638	3,374616
4	4,41632256	4,47070973	4,52563125	4,58109103	4,63709296
5	5,63297546	5,71689166	5,80191281	5,8880510	5,97531854
6	6,89829448	7,01915179	7,14200845	7,26689384	7,39383765
7	8,21422626	8,38001362	8,54910888	8,72157300	8,89746791
8	9,58279531	9,80211423	10,02656432	10,25625951	10,49131598
9	11,06610712	11,28320937	11,57789254	11,87535379	12,18079494
10	12,48635141	12,84117879	13,20678716	13,58349825	13,97164264
11	14,02580546	14,46403184	14,91712652	15,38559065	16,86994120
12	15,62683768	16,15991327	16,71298285	17,28679814	17,88213167
13	17,29191119	17,93210037	18,59863199	19,28257203	20,01506593
14	19,02358764	19,78405429	20,57856359	21,40866350	22,27596983
15	20,82453114	21,71933673	22,65749177	23,64113999	24,67252808
16	22,69751239	23,74170689	24,84036636	25,99640269	27,21287976
17	24,64541288	25,85568370	27,13238467	28,48120483	29,90566255
18	26,67122940	28,06356246	29,53900391	31,10277110	32,75999170
19	28,77807858	30,37142277	32,06595410	33,86831801	35,78559120
20	30,96920172	32,78313680	34,71925181	36,78607050	38,99272668
21	33,24796979	35,30337795	37,50521440	39,86430969	42,39229028
22	35,61778858	37,93702996	40,43047512	43,11184669	45,99582769
22	38,08260412	40,68919631	43,50199887	46,53799825	49,81557785
24	40,64590829	43,56521015	46,72709882	50,15258816	53,86451200
25	43,31174462	46,57064460	50,11355376	53,96598031	58,15638272
26	46,08421440	49,71132361	53,66912643	57,98910943	62,70576568
27	48,96758298	52,99333317	57,40258277	62,23351045	67,52811162
28	51,96628630	56,42303316	61,32271191	66,71135353	72,63979832
29	55,08493775	60,00706966	63,43884750	71,43547797	78,03818622
30	58,32833526	63,75238779	69,76978988	76,41942426	83,80167739
31	61,70146867	67,66624524	74,29882937	81,67749787	89,88987803
32	65,20952742	71,75622628	78,06377084	87,22476025	96,34316471
33	68,85790851	76,03025646	84,06695938	93,07712207	103,18375460
34	72,65222486	80,49661800	89,32030735	99,25136378	110,43477987
35	76,59831385	85,16396581	94,83632272	105,76518879	118,12086666
36	80,70224640	90,04134427	100,62813886	112,63727417	126,26811866
37	84,97033626	95,13820476	106,70954580	119,88732425	134,90420578
38	89,40914971	100,46442394	113,09502309	127,53612708	144,05845813
39	94,02551570	106,03032306	119,19977424	135,60561407	153,76196562
40	98,82653633	111,84668760	126,83976295	144,11892285	164,04768356
41	103,81959778	117,92478854	134,23175110	153,10046360	174,95054457
42	109,01238169	124,27640402	141,99333866	162,57598910	186,50757724
43	114,41287696	130,91384220	150,14300559	172,57266850	196,75803188
44	120,02939204	137,84996510	158,70015587	183,11916527	211,74351379
45	125,87056772	145,09821353	167,68516366	194,24571936	225,50182462
46	131,94539053	152,67263314	177,11942185	205,98423392	240,09861210
47	138,26320604	160,58790163	187,02539294	248,36836679	255,56452882
48	114,83373429	168,85935720	197,42666259	231,43362696	271,95840055
49	151,66708366	177,50302828	208,34799572	245,21747645	289,33590458
50	158,77376700	186,53566455	219,81539550	259,75943765	307,75605860

Kunci Matematika XII Bahasa SMA

BAB 1
Program Linear

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1.	D	6.	A	11.	B
2.	B	7.	C	12.	D
3.	C	8.	E	13.	E
4.	E	9.	D	14.	A
5.	B	10.	C	15.	A

B. Essay

17. Banyaknya mobil box adalah 20 dan banyaknya truk 20, sedangkan pendapatan maksimumnya adalah Rp180.000,00.
19. Biaya minimumnya Rp136.000,00.

BAB 2
Matriks

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1.	B	6.	C	11.	D
2.	D	7.	E	12.	C
3.	B	8.	D	13.	B
4.	A	9.	E	14.	C
5.	D	10.	A	15.	D

B. Essay

17. a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Jadi, $x = 3$ dan $y = -1$.

19. a. Sistem persamaan linear:
(i) $5x + 2y = 360.000$
(ii) $3x + 3y = 270.000$

b. Persamaan matriks:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.000 \\ 27.000 \end{pmatrix}$$

c. Penyelesaiannya:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 36.000 \\ 27.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.000 \\ 3.000 \end{pmatrix}$$

Jadi, harga boneka Rp6.000,00 dan harga bola Rp3.000,00.

Latihan Ulangan Umum Semester 1

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1.	B	11.	E	21.	C
2.	A	12.	B	22.	D
3.	B	13.	D	23.	E
4.	A	14.	C	24.	A
5.	D	15.	E	25.	A
6.	C	16.	A	26.	D
7.	C	17.	D	27.	E
8.	D	18.	D	28.	E
9.	E	19.	C	29.	A
10.	D	20.	E	30.	B

B. Essay

31. a. Nilai f maksimum adalah $f(6,0) = 18$ dan nilai f minimum adalah $f(0,0) = 0$.
b. Nilai g maksimum adalah $g(6,0) = 24$ dan nilai g minimum adalah $g(0,0) = 0$.

33. a. $AB = \begin{pmatrix} 31 & 45 \\ 24 & 35 \end{pmatrix}$

b. $(AB)^t = \begin{pmatrix} 31 & 24 \\ 45 & 35 \end{pmatrix}$

c. $B^t A^t = \begin{pmatrix} 31 & 24 \\ 45 & 35 \end{pmatrix}$

d. $A^{-1} B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 31 & -42 \\ -40 & 35 \end{pmatrix}$

e. $B^{-1} A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 35 & -45 \\ -24 & 31 \end{pmatrix}$

35. Biaya minimumnya Rp136.000,00.

37. a. Model matematika:

(i) $2x + 3y + z = 11.000$

(ii) $x + 4y + 2z = 12.500$

(iii) $3x + 2y + 2z = 15.500$

b. Penyelesaian:

$x = 2.500$

$y = 1.000$

$z = 3.000$

c. Harga 1 buku Rp2.500,00, harga 1 pensil Rp1.000,00, dan harga 1 bolpoin Rp3.000,00.

39. a. Nilai k agar $kI - A$ punya invers adalah $k \neq 1$ dan $k \neq 5$.

b. Nilai k agar $kI - A$ tidak punya invers adalah $k = 1$ atau $k = 5$.

BAB 3
Barisan dan Deret

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. B	6. A	11. E
2. A	7. E	12. B
3. D	8. A	13. D
4. E	9. D	14. A
5. C	10. C	15. B

B. Essay

17. a. Beda, $b = -3$ dan suku ke-n, $u_n = 14 - 3n$.

b. Jumlah n suku pertama:

$$S_n = \frac{n}{2}(25 - 3n)$$

19. Besar modal setelah 10 tahun adalah Rp518.748.492,00.

Latihan Ulangan Umum Semester 2

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. C	11. B	21. E
2. A	12. C	22. C
3. E	13. D	23. D
4. A	14. D	24. A
5. D	15. D	25. A
6. E	16. B	26. B
7. D	17. A	27. E
8. B	18. E	28. B
9. D	19. A	29. A
10. E	20. E	30. B

B. Essay

31. a. Suku ke-n, $u_n = 4n - 3$.

b. Beda, $b = 4$.

c. Suku ke-4, $u_4 = 13$.

33. a. Suku pertama, $a = 7$.

b. Beda, $b = 3$.

c. Jumlah 10 suku pertama, $S_{10} = 205$.

35. (i) Untuk $n = 1$ diperoleh $9 - 2 = 7$ habis dibagi 7.

Jadi, pernyataan benar untuk $n = 1$.

(ii) Dianggap pernyataan benar untuk $n = k$, berarti berlaku:

$9^k - 2^k$ habis dibagi 7

Selanjutnya dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} 9^{k+1} - 2^{k+1} &= 9 \cdot 9^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 7 \cdot 9^k + 2 \cdot 9^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 7 \cdot 9^k + 2 \cdot (9^k - 2^k) \end{aligned}$$

(habis dibagi 7)

37. Besar modal setelah 12 tahun adalah Rp251.817.012,00.

39. Lama pinjaman diangsur adalah 40 bulan.

Wahana

MATEMATIKA 3

PROGRAM ILMU BAHASA

Matematika menurut sifatnya merupakan ratu dan sekaligus sebagai pelayan ilmu, maka sebagai ratu matematika mempunyai struktur yang sistematis dan logis tidak dapat dipengaruhi oleh ilmu yang lain, sedangkan sebagai pelayan matematika menyediakan alat yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan pada ilmu-ilmu yang lain. Buku ini ditekankan pada cara berpikir sistematis dan logis, di samping menyajikan aplikasinya pada kehidupan sehari-hari. Dengan karakteristik ini diharapkan setelah mempelajari buku ini siswa dapat berpikir secara sistematis dan logis untuk mengambil kesimpulan.

Buku ini disusun sesuai dengan kurikulum yang berlaku dan dengan harapan dapat mengembangkan keragaman potensi, minat, kecerdasan intelektual, emosional, spritual, dan kinestetik siswa secara optimal sesuai dengan tingkat perkembangan siswa tersebut. Beberapa keunggulan buku matematika ini adalah sebagai berikut.

1. Materi disajikan secara sederhana, sistematis, inspiratif, dan realistis. Siswa diajak berpikir logis dan melihat aplikasi matematika dalam kehidupan sehari-hari.
2. Untuk mempermudah pemahaman konsep materi, buku ini dilengkapi dengan contoh soal dan penyelesaian. Selain itu, soal-soal pelatihan disajikan dalam berbagai bentuk untuk meningkatkan kemampuan daya pikir, analisis, komunikasi, dan kreativitas.
3. Buku ini dilengkapi dengan math info dan teka-teki matematika.Dengan demikian diharapkan dapat membangkitkan rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika.
4. Buku ini disusun dengan memenuhi kaidah-kaidah tipografi, tata letak, dan pewarnaan yang memenuhi standar "Human Computer Interactive". Hal ini dimaksudkan untuk merangsang minat dalam membaca dan mempelajari materi.

Buku matematika ini peduli dengan proses pendidikan yang dapat diterima dengan baik oleh semua kelompok siswa; kelompok normal (novice), kelompok sedang (intermediate), dan kelompok tinggi (advance). Buku ini berusaha menjadi sarana penunjang yang baik demi kemajuan pendidikan Indonesia.

ISBN 978-979-068-854-4 (no jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-857-5

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81 Tahun 2008 tanggal 11 Desember 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses pembelajaran.

Harga Eceran Tertinggi (HET) Rp9.672,-